

مکانیک پرواز 1

دکتر محمد آقای متعلق

مکانیک پرواز I

کتاب‌ها:

- ① Aircraft Performance & Design (John D. Anderson)
- ② Mechanic of Flight (Warren F. Phillips)
- ③ An Introduction to Aircraft Performance (Mario Asselin)

1- ات‌سفر

2- تئوری مکانیک ملخ‌ها

3- عملکرد Performance

The aircraft flight mechanics is divided in to

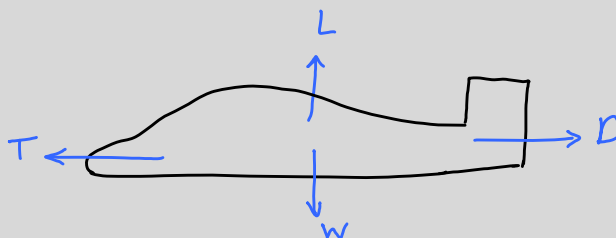
- 1- Performance: (مکانیک پرواز I) study of aircraft motion
- 2- Stability & Control: (مکانیک پرواز II) stability analysis of the aircraft

مکانیک پرواز: مطالعه حرکت اجسام پرنده در هوا در بحث مکانیک پرواز مطرح می‌گردد که به 2 بخش ① عملکرد Performance و ② پایداری و کنترل stability & control تقسیم می‌گردد.

در مکانیک پرواز I، قسمت اول مورد توجه است که در مورد مسائل کمیته حرکت هواپیما از قبیل نرخ اوج‌گیری، برد، سطح پرواز، طول بانز، زاویه گلاید و ... بحث می‌شود.

موضوع عملکرد بیشتر با نیروهای وارد بر هواپیما سروکار دارد و از محاسبات نیروها، پارامترهای حرکت بدست می‌آید. عملکرد هواپیما نشانگر شاخص‌هایی است که از بُعد یک محصول تجاری آن را متمایز می‌سازد، مثلاً اگر هواپیما A بتواند نسبت به هواپیمای B از روی یک بانز کوتاه تر نشست و برخاست کند یا سریعتر و بالاتر اوج‌گیری نماید یا مسافت بیشتری را طی کند یا سوخت کمتری مصرف کند یا کیفیت سواری بهتری را عرضه نماید و یا از لحاظ توانایی حمل بار مفید و هزینه خرید آن با هواپیمای B برابر باشد، مسلماً مشتری آن بیش از هواپیمای B خواهد بود. در مکانیک پرواز II، در مورد مسائل کیفیتی حرکت هواپیما از قبیل تعادل، کنترل، پایداری، قابلیت مانور و ... بحث می‌گردد و موضوع محاسبات پایداری و کنترل بیشتر از گساورها مطرح می‌شود.

نیروهای وارد بر هواپیما شامل:



1- Lift برا

2- Drag پا

3- Thrust رانشی

4- Weight وزن

جو یا اتمسفر: توده سیالی است که تا ارتفاع 10000 km اطراف کره زمین را دربرگرفته است. خصوصیات اتمسفر بیشتر از هر پارامتر دیگر در تعیین خواص مملکدرهای هواپیما دارای اهمیت است. اتمسفر توسط وزن خورش متراکم خواهد شد و لذا بیشترین دانسیته در کمترین ارتفاعات از سطح زمین وجود خواهد داشت. هر چه دانسیته بیشتر باشد، عملکرد بهتر است. البته به خاطر جاذبایی هوا خصوصیات اتمسفر در هر نقطه و ارتفاع از یک روز به روز دیگر یا سمت به سمت دیگر متفاوت است.

The standard atmosphere

اتمسفر استاندارد

It gives the mean values of density, temperature and pressure, as a function of the altitude.

Importance: It gives average atmospheric conditions presents a standard atmospheric condition.

خواص میانگین شده اتمسفر در نقاط و ارتفاعات مختلف قابل استفاده بوده و برای تهیه جدول اتمسفر استاندارد به کار گرفته می شود. بدین معنا که متوسط اندازه گیریهای پارامترهای اتمسفر در سطح زمین و نرخ تغییرات آن با ارتفاع اتمسفر استاندارد را به وجود خواهد آورد.

ترکیب اتمسفر در مجاورت سطح دریا عموماً متشکل از نیتروژن به میزان 78.09% جی و اکسیژن 20.95% جی و آرگون 0.93% جی و دی اکسید کربن 0.03% جی و بقیه گازها (هیدروژن، هلیوم، متان، کریپتون و بخار آب و...) می باشد.

موسسات معروفی که بر روی اتمسفر استاندارد فعالیت نموده اند عبارتند از:

NIMA (National Imagery and Mapping Agency)

ISA (International Standard Atmosphere)

این موسسات برای ارائه جدول استاندارد، فرضیات زیر را در نظر گرفته اند:

1- فرضیه گاز کامل برای هوا

2- فرضیه تغییر خطی دما با ارتفاع

3- رطوبت نسبی در نظر گرفته نشود.

4- تغییر جاذبه با ارتفاع در نظر گرفته نشده است.

5- رابطه در اتمسفر بر پایه قانون گاز کامل، دما با ارتفاع، معادله هیدرواستاتیک تولید می گردد.

6- مرجع سطح دریا است.

نکته: هرچه دراز زمین دور شویم فشار و دانسیته کاهش می یابد اما درجه حرارت و ویسکوزیته متغیر است.

نکته: در ارتفاع بالاتر از 120000 ft (تقریباً 36 km) از سطح دریا اکسیژن کافی برای فرآیند سوخت در موتور هلی جت

وجود ندارد. بر این اساس می توان این را سقف پرواز هواپیماهای امروزی دانست.

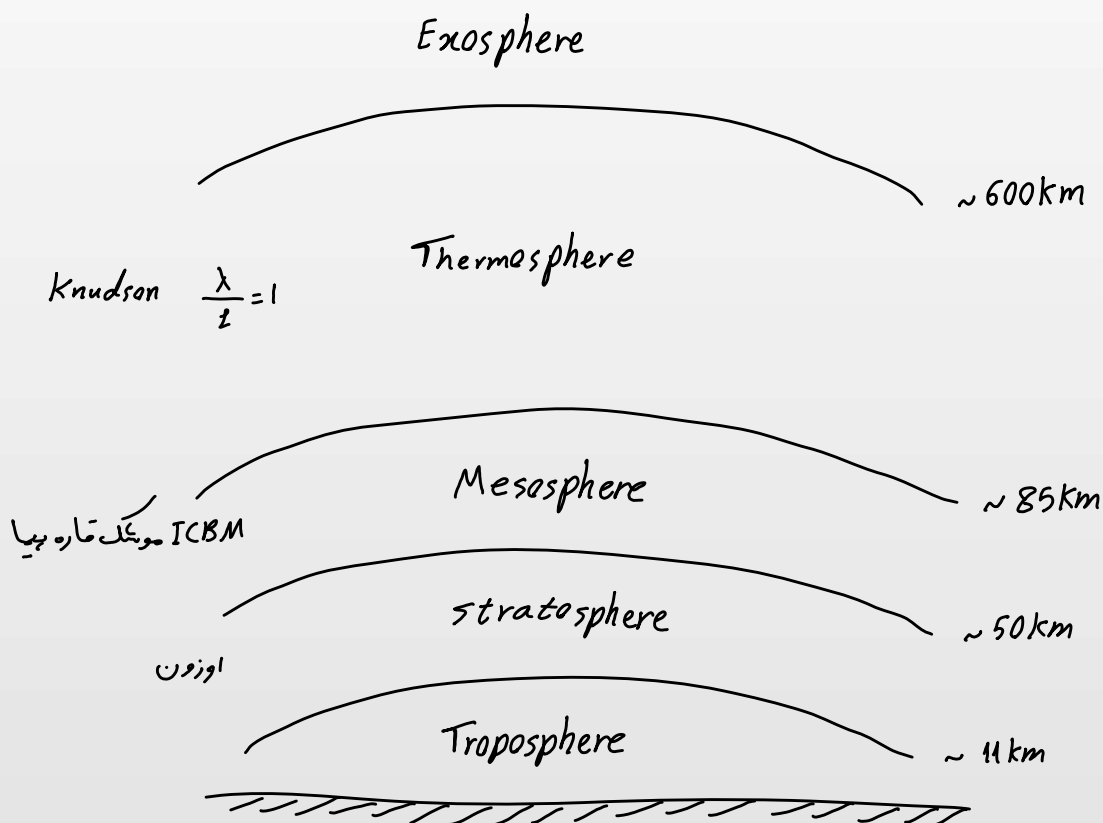
شرایط فشار و دما و دانسیته هوا در سطح دریا به عنوان مرجع ارتفاع می باشد به ترتیب زیر است:

شرایط استاندارد سطح دریا: sea Level (SL):

$$P_0 = 101325 \text{ Pa} = 14.7 \text{ Psi} = 2116.2 \text{ Psf} = 760 \text{ mm Hg} = 29.2 \text{ in Hg}$$

$$T_0 = 15^\circ\text{C} = 288.15 \text{ K} = 59^\circ\text{F} = 518.67 \text{ R}$$

$$\rho_0 = 1.2250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0.002378 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}$$



تا 11 km لایه جو تروپوسفر نام دارد که ضخامت آن مثلاً در قطب ها 5 mile = 8.1 km و در استوا 9 mile = 14.5 km است که متوسط آن در نقاط مختلف زمین 7 mile = 11.3 km است. حداکثر لایه تروپوسفر را 11 km در نظر می گیریم. اکثر هواپیماها در تروپوسفر پرواز می کنند.

Altitude:

ارتفاع

Geometric altitude → Height above the sea level. (h_G)

فاصله عمودی از یک نقطه در فضا تا سطح دریا

Absolute altitude → Distance from the earth center. (h_A)

$$h_{abs} = h_G + r$$

فاصله عمودی از یک نقطه در فضا تا مرکز زمین

Geopotential altitude → A fictitious altitude used for convenience

یک ارتفاع مجازی که فقط برای بهبود دقت رابطه هیدرواستاتیک تعریف شده است. جدول استاندارد این ارتفاع را به ما می‌دهد و ارتفاعی است که g در آن ثابت فرض شده است. (h)

Pressure altitude → altitude in standard atmosphere that corresponds to a measured pressure. (h_p)

ارتفاعی که از جدول استاندارد بر حسب فشار اندازه‌گیری می‌شود.

Density altitude → altitude in standard atmosphere that corresponds to a measured density. (h_ρ)

ارتفاعی که از جدول استاندارد بر حسب چگالی اندازه‌گیری می‌شود.

Temperature altitude → altitude in standard atmosphere that corresponds to a measured temperature. (h_T)

ارتفاعی که از جدول استاندارد بر حسب دما اندازه‌گیری می‌شود.

نکته: در یک روز استاندارد ارتفاع هلی بر حسب دما، فشار، چگالی برابرند

$$P = 4.7217 \times 10^4 \frac{N}{m^2} \xrightarrow{A} h_G = 6 \text{ km} , h = 5.994 \text{ km}$$

مثال:

$$T = 255.69 \text{ K} \xrightarrow{A} h_G = 5 \text{ km} , h = 4.996$$

h_G	h	T	p	ϕ

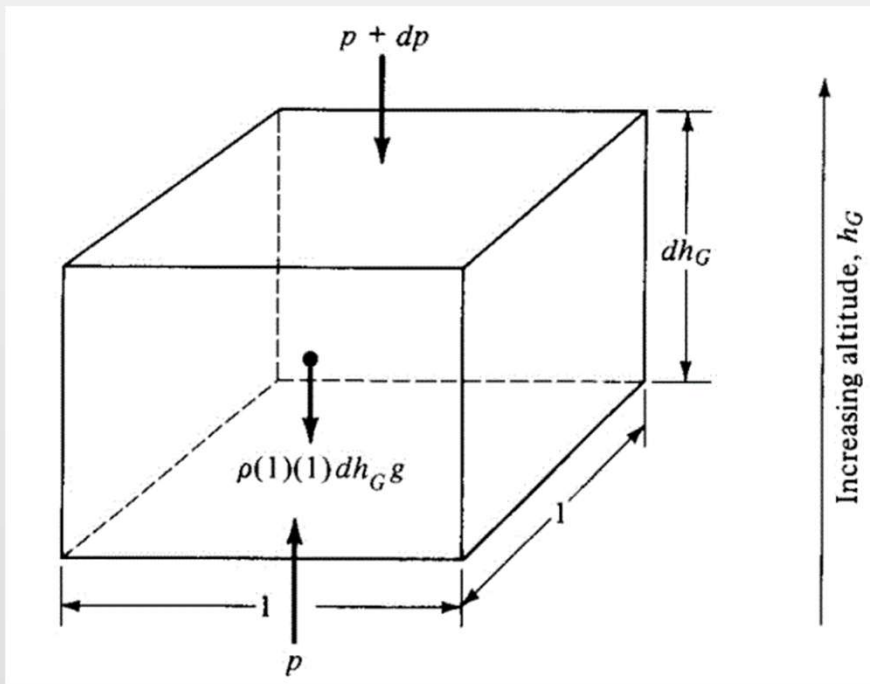
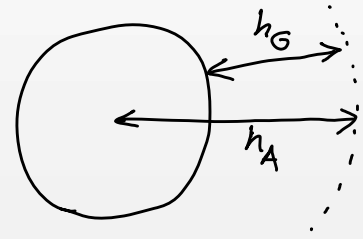
با استفاده از جدول انتهای جزوه.

$$\phi = \frac{p}{RT} = \frac{4.7217 \times 10^4}{287 \times 255.69} = 0.6434 \xrightarrow{\text{جدول A}} h_G = 6.25 \text{ km} , h = 6.246 \text{ km}$$

$$\frac{g}{g_0} = \frac{r^2}{(r+h_G)^2} \rightarrow g = g_0 \frac{r^2}{(r+h_G)^2}$$

$$g_0 = 9.81 \frac{m}{s^2} = 32.2 \frac{ft}{s^2}$$

The hydrostatic equation:



consider a $1 \times 1 \times dh_G$ cube

$$\text{Volume} = 1 \times 1 \times dh_G = dh_G$$

$$\text{mass} = \rho V = \rho dh_G$$

$$\text{weight} = mg = \rho g dh_G$$

Forces acting on the cube:

1- weight , downward $\downarrow$

2- pressure force on lower surface : $P \times 1 \times 1 = P \uparrow$

3- pressure force on upper surface : $(P+dp) \times 1 \times 1 = P+dp \downarrow$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -\rho g dh_G + P - P - dp = 0$$

$$\rightarrow \boxed{dp = -\rho g dh_G} \quad \text{Hydrostatic equation}$$

$$\left. \begin{aligned} dp &= -\rho g dh_G \\ dp &= -\rho g_0 dh \rightarrow \text{Geopotential altitude} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g dh_G = g_0 dh$$

$$\Rightarrow dh = \frac{g}{g_0} dh_G \quad \Rightarrow dh = \frac{r^2}{(r+h_G)^2} dh_G$$

برطبق قرارداد h و h_G بر سطح دریا برابر با صفر می باشند.

$$\int_0^h dh = \int_0^{h_G} \frac{r^2}{(r+h_G)^2} dh_G = r^2 \int_0^{h_G} \frac{dh_G}{(r+h_G)^2}$$

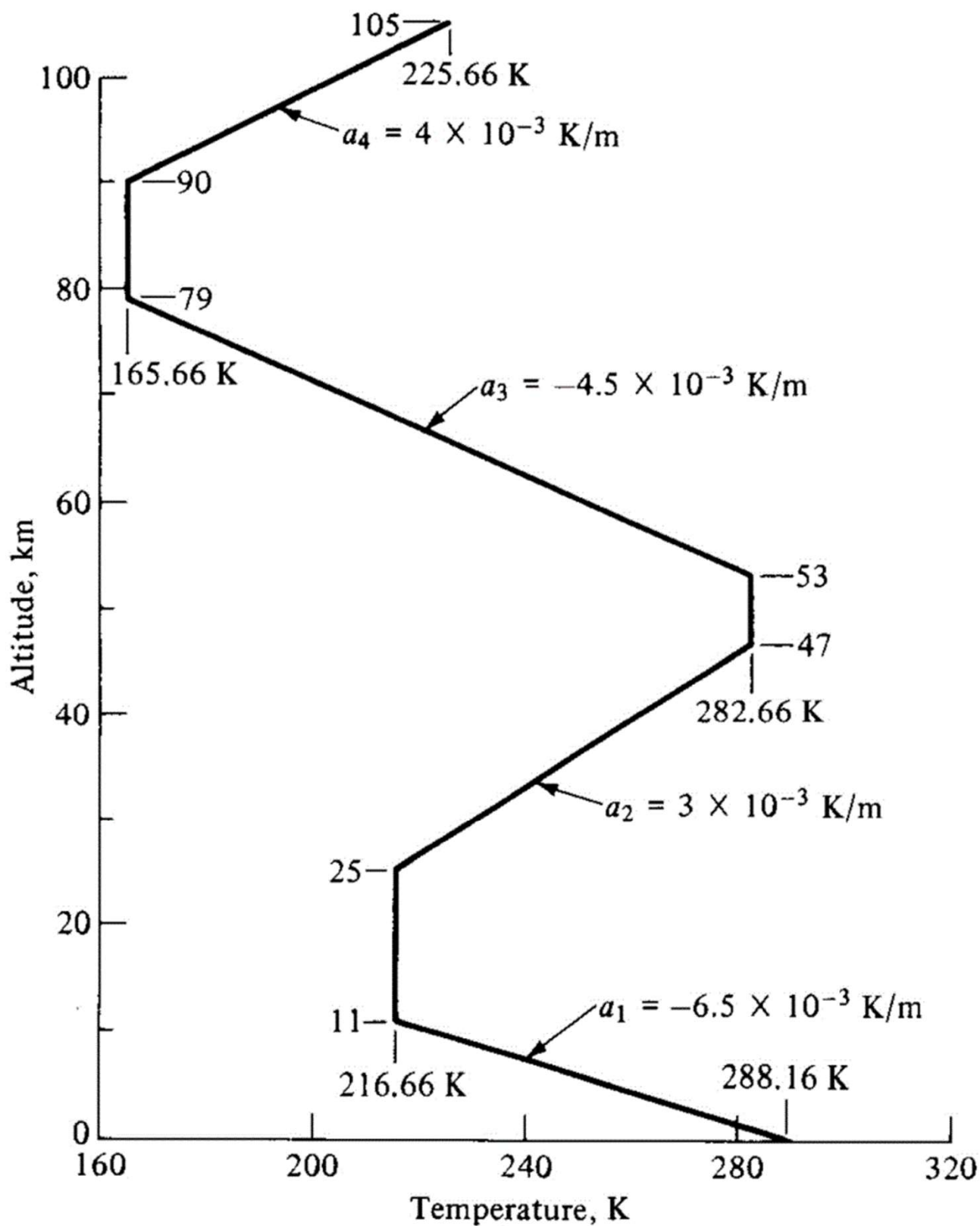
$$\rightarrow h = r^2 \left(\frac{-1}{r+h_G} \right) \Big|_0^{h_G} = r^2 \left(\frac{-1}{r+h_G} + \frac{1}{r} \right) = r^2 \left(\frac{-r+r+h_G}{(r+h_G)r} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{r}{r+h_G} h_G}$$

$$h_G = 7 \text{ km} \rightarrow h = \frac{6371}{6371+7} \times 7 = 6.99 \text{ km}$$

مثال:

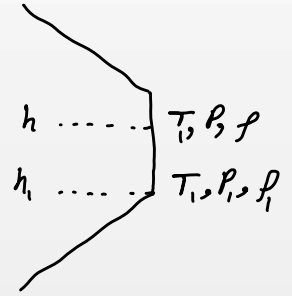
قطر زمین 6371 km



Isothermal layer:

$$\left. \begin{aligned} dp &= -\rho g_0 dh \\ p &= \rho RT \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{p_i}^p \frac{dp}{p} = \int_{h_i}^h -\frac{g_0}{RT} dh$$

$$T = T_i$$



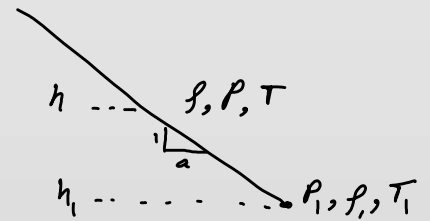
$$\Rightarrow \frac{p}{p_i} = e^{-\frac{g_0}{RT} (h-h_i)} \quad \text{Pressure changes in isothermal layer}$$

to calculate the density:

$$\left. \begin{aligned} p &= \rho RT_i \\ p_i &= \rho_i RT_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p}{p_i} = \frac{\rho}{\rho_i} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_i} = e^{-\frac{g_0}{RT} (h-h_i)} \quad \text{density change in isothermal layer}$$

Gradient layer:

$$\left. \begin{aligned} dp &= -\rho g_0 dh \\ p &= \rho RT \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{p_i}^p \frac{dp}{p} = \int_{h_i}^h -\frac{g_0}{RT} dh$$



$$\frac{dT}{dh} = a \quad \text{lapse rate} \quad \rightarrow dh = \frac{1}{a} dT$$

$$\Rightarrow \int_{p_i}^p \frac{dp}{p} = \int_{T_i}^T -\frac{g_0}{Ra} \frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p_i} = \left(\frac{T}{T_i} \right)^{-\frac{g_0}{Ra}} \quad \text{Pressure change in gradient layer}$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \rho RT \\ p_i &= \rho_i RT_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p}{p_i} = \frac{\rho}{\rho_i} \cdot \frac{T}{T_i} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_i} = \left(\frac{T}{T_i} \right)^{-\left[\frac{g_0}{aR} + 1 \right]} \quad \text{density change in gradient layer}$$

$$T = T_i + a(h-h_i) \quad \text{Temperature change in gradient layer}$$

Define: Density ratio : $\delta = \frac{\rho}{\rho_1}$

Pressure ratio : $\delta = \frac{p}{p_1}$

Temperature ratio : $\theta = \frac{T}{T_1}$

$p = \rho RT \rightarrow \delta = \delta \theta$

in troposphere is gradient layer

مثال:

$T_1 = 288.16 \text{ K}$, $\alpha = -6.5 \times 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}$

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{-\frac{g_0}{\alpha R}} \rightarrow \frac{p}{p_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{5.2586} \rightarrow \delta = \theta^{5.2586}$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{-\left[\frac{g_0}{\alpha R} + 1 \right]} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{4.2586} \rightarrow \delta = \theta^{4.2586}$$

$$\alpha = \frac{dT}{dh} = \frac{T - T_1}{h - h_1} \Rightarrow T = T_1 + \alpha(h - h_1) \rightarrow \theta = 1 - 2.2557 \times 10^{-5} h$$

مثال: فشار و چگالی و دما هوا در ارتفاعات 8000m و 20000m را محاسبه نمایید.

لایه گرمایی → لایه تروپوسفر → $h = 8000m$

$$T_2 = T_1 + a(h_2 - h_1) = 288.16 + (-6.5 \times 10^{-3}) \times (8000 - 0) = 236.16 \text{ K}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{-\frac{g_0}{aR}} = \left(\frac{236.16}{288.16} \right)^{\frac{-9.81}{-6.5 \times 10^{-3} \times 287}} = 0.3511635$$

$$P_2 = 0.3511635 \times 101325 = 35582 \text{ Pa}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{-\left[\frac{g_0}{aR} + 1 \right]} = \left(\frac{236.16}{288.16} \right)^{-\left[\frac{9.81}{-6.5 \times 10^{-3} \times 287} + 1 \right]} = 0.4282486$$

$$\rho_2 = 0.4282486 \times 1.225 = 0.5249 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

لایه هم‌رما → لایه استراتوسفر → $h = 20000m$

ابتدا باید شرایط اولیه لایه هم‌رما که در ارتفاع 11000m است را بدست آوریم

$$T_1 = T_0 + a_1(h_1 - h_0) = 288.16 + (-6.5 \times 10^{-3}) \times 11000 = 216.66 \text{ K}$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{-\frac{g_0}{aR}} = \left(\frac{216.66}{288.16} \right)^{\frac{-9.81}{-6.5 \times 10^{-3} \times 287}} = 0.2231983$$

$$P_1 = 0.2231983 \times 101325 = 22616 \text{ Pa}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{-\left[\frac{g_0}{aR} + 1 \right]} = \left(\frac{216.66}{288.16} \right)^{-\left[\frac{9.81}{-6.5 \times 10^{-3} \times 287} + 1 \right]} = 0.296856$$

$$\rho_1 = 0.296856 \times 1.225 = 0.363649 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

حال که نقاط شروع را داریم سرانجام مرسوم هلی هم داریم رویم.

$$T_2 = T_1 = 216.66 \text{ K}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{-\frac{g_0}{RT}(h_2 - h_1)} = e^{-\frac{9.81}{287 \times 216.66} (20000 - 11000)} = 0.2417436$$

$$p_2 = 0.2417436 \times 22616 = 5467 \text{ Pa}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} = 0.2417436$$

$$\rho_2 = 0.2417436 \times 0.363649 = 0.0879098 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

رطوبت:

رطوبت باعث کاهش دانسیته هوا می‌گردد. در نتیجه باعث کاهش عملکرد می‌شود. هرچه قدر دانسیته کمتر باشد، عملکرد کاهش می‌یابد.

گنجایش هوا برای نگهداری بخار آب مستقیماً با دمای هوا مرتبط است. هرچه قدر که دمای هوا بیشتر باشد، مقدار بخار آب بیشتری را در خود نگه می‌دارد، زمانی که هوای تمام بخار آبی را که می‌تواند در خود نگه دارد را جذب کند، می‌گویند اشباع شده است.

رطوبت نسبی: نسبت مقدار بخار آب موجود در یک حجم معین از هوا به مقدار بخار آب در حالت اشباع می‌باشد. دمای که در آن شرایط اشباع می‌شود به عنوان نقطه شبنم است. وجود بخار آب باعث کاهش دانسیته می‌گردد لذا عملکرد موتور هواپیما وابسته به آن است.

$$P = P_A + P_v \quad \text{قانون دالتون}$$

$$P = P_A + P_v \quad \rightarrow \quad P_{\text{هوای خنک}} < P_{\text{مخلوط}}$$

Altimeter:

ارتفاع سنج:

An instrument which read the pressure altitude directly.

ابزاری است که ارتفاع فشاری یا ارتفاع کالیبره شده را نشان می دهد.

If sealevel conditions, Lapse rate, g_0 and R are equal:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Pressure} \\ \text{Temperature} \\ \text{Density} \end{array} \right\} \text{Altitude} = \text{geometric altitude}$$

In the sealevel : pressure alt = temp alt = density alt

مثال: یک ارتفاع سنج استاندارد 14000 ft، انسان می دهد، در صورتیکه دمای محیط 35 F باشد، ارتفاع دانسیته را بیابیم.

$$h = 14000 \text{ ft} \xrightarrow{\text{از جدول استاندارد}} P_1 = 1.2436 \times 10^3 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2}$$

$$P_0 = 2.1162 \times 10^3 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2} \rightarrow \delta = \frac{P_1}{P_0} = 0.58766$$

$$\theta = \frac{T_1}{T_0} = \frac{35 + 459.69}{518.69} = 0.95373$$

$$\phi = \frac{\delta}{\theta} = \frac{0.58766}{0.95373} = 0.61617$$

$$\rho_0 = 2.3769 \times 10^{-3} \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} \rightarrow \rho_1 = 1.4646 \times 10^{-3} \rightarrow h_p = 15653 \text{ ft}$$

Air speed measurement:

- 1- **True air speed:** Actual relative speed between ^{Aircraft} A/c and the surrounding air. V_T (TAS)
- 2- **Ground speed:** Actual relative speed between A/c and the earth surface. V_g
- 3- **wind speed:** The speed of wind relative to the earth surface. w
$$\vec{V}_g = \vec{V}_T + \vec{w}$$

Low speed aircraft:

Euler equal: $dp + \rho dV = 0 \rightarrow P_s + \frac{1}{2} \rho V^2 = cte = P_T$

$q = \text{dynamic pressure} = \frac{1}{2} \rho_{air} V^2$

- 4- **equivalent air speed:** Velocity at standard sea level that corresponds to the same dynamic pressure as in a certain altitude. V_e (EAS)

$$\left. \begin{array}{l} \text{در ارتفاع } V \rightarrow q = \frac{1}{2} \rho V_T^2 \\ \text{sea level } V_e \rightarrow q_e = \frac{1}{2} \rho_e V_e^2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{2} \rho_e V_e^2 = \frac{1}{2} \rho V_T^2 \rightarrow \boxed{V_e = \sqrt{\sigma} V_T}$$

- 5- **Indicated air speed:** (IAS) V_I سرعت صرف نظر از خطاهایی که از دستگاه می‌گیریم

$$V_I = V_i + \Delta V_i$$

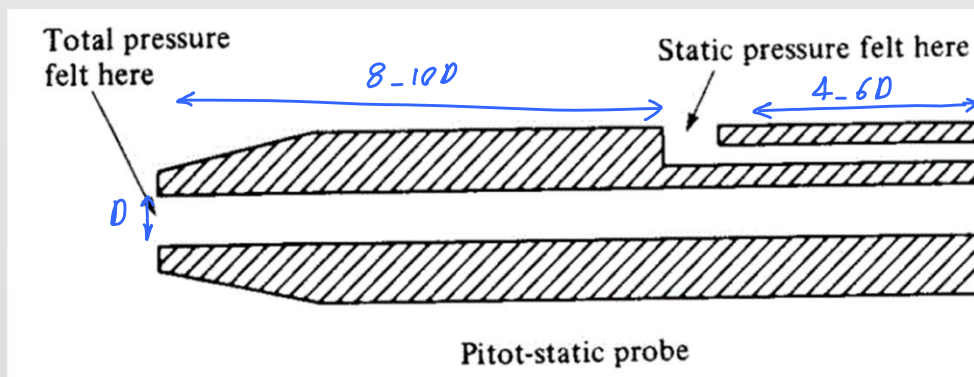
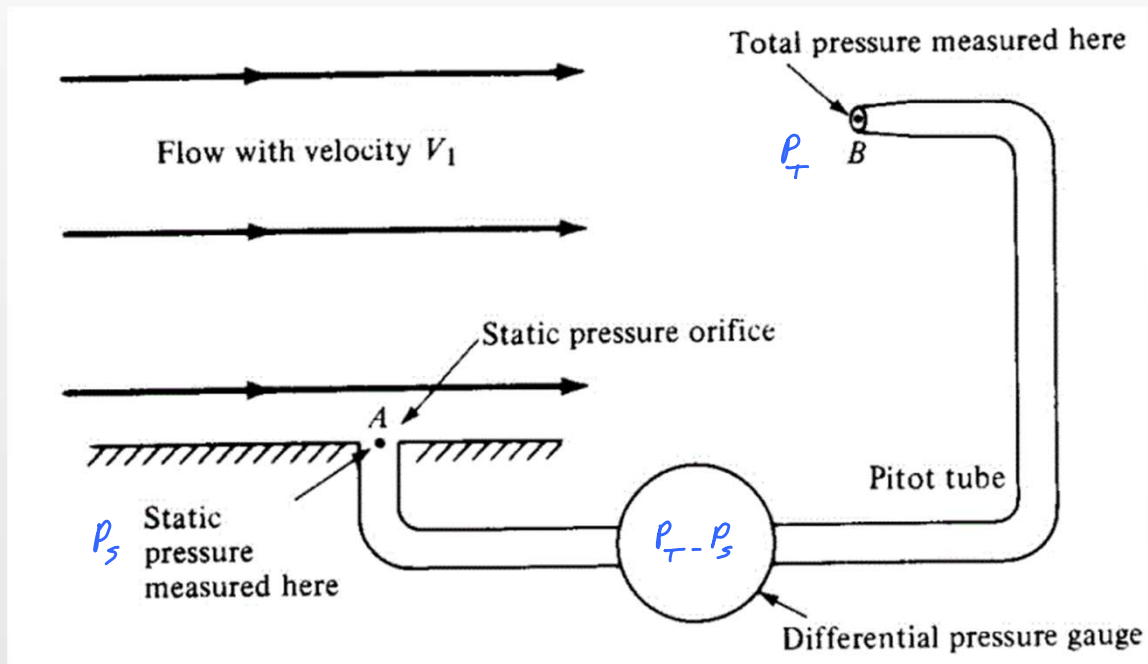
خطایی که به صورت ΔV_i در دستگاه وجود دارد
سرعتی که دستگاه اندازه می‌گیرد

- 6- **Calibrated air speed:** (CAS) $V_c = V_I + \Delta V_p$

Position error خطایی که ناشی از جایی است که دستگاه در هوا پیاقرار دارد

$$V_e = V_c + \Delta V_c$$

خطایی ناشی از تراکم ناپذیری



لوله پیتوت وسیله ای است که فشار استاتیک و فشار *stagnation point* را نشان می دهد.

$$P_S = P_\infty \quad \text{محیط ambient}$$

سیال به محض رسیدن به دهانه لوله پیتوت به سرعت صفر می رسد و ضربه زرات سیال به هم تبدیل به فشار می شود

و فشار *Total* را اندازه گیری می کند. P_S با P_{atm} یا $P_{ambient}$ برابر است بنابراین

$$P_T = P_S + P_D$$

در لوله پیتوت فاصله 8-10D به خاطر این است که تغییرات سرعت بعد لوله باعث اختلاف فشار P_S با

P_{amb} نشود و این فاصله باعث رسیدن به P_{amb} است.

Velocity Measurement errors:

1) Instrument error : $\left\{ \begin{array}{l} \text{scale error} \\ \text{Manufacturing error} \\ \text{Magnetic fields} \end{array} \right.$

2) Pressure lag: due to time delay in transmitting the pressure from the point of measurement to the sensor.

3) position error: the total pressure can not be measured in the following:

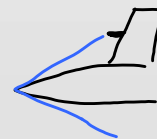
① behind the propeller



② in wake region



③ behind a shock wave



or a region by supersonic flow

The proper location: nose tip

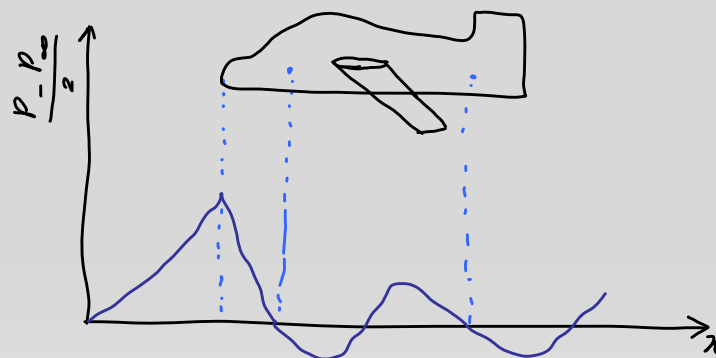
under the wing

wing tip

tail tip



جاهایی که P برابر با P_∞ است برای فشار استاتیکی مناسب است.



$$\text{subsonic} \begin{cases} M \leq 0.3 & \rho = \text{cte} & \text{incompressible} \\ 0.3 < M < 0.8 & \rho \neq \text{cte} & \text{compressible} \end{cases}$$

$$\text{Transonic} \quad 0.8 \leq M \leq 1.2$$

$$\text{supersonic} \quad 1.2 < M < 5$$

$$\text{Hypersonic} \quad M > 5$$

for $M < 1$

$$\text{incompressible:} \quad V_E = \sqrt{\frac{2(P_T - P_s)}{\rho_0}}$$

$$\text{compressible:} \quad M^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_T}{P_{amb}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad M = \frac{V}{a} \quad a = \sqrt{\gamma R T}$$

for $M > 1$

به خاطر موج ضربه ای که به وجود می آید لوله پیستوت بر روی نوک دماغه هواپیما یا روی میله ای نصب می شود تا فقط یک shock قبل از آن به وجود بیاید، به خاطر اینکه شوک ها در اطراف بدنه و نوک وجود دارند. در نتیجه لوله

$$P_s = P_{amb} \quad \text{if} \quad L = 8-10D \quad \text{پیستوت روی بدنه قرار نمی دهند.}$$

لوله پیستوت P_2 را می خوانند.

$$\frac{P_{T2}}{P_{\infty}} = f(M_1) = \left(\frac{(\gamma+1)^2 M_1^2}{4\gamma M_1^2 - 2(\gamma-1)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \times \frac{1-\gamma+2\gamma M_1^2}{\gamma+1}$$

نکته: برای تشخیص نوع جریان نسبت به $\frac{P_T}{P_{\infty}}$ اندازه گیری کرده و در صورتی که این نسبت بزرگتر از 1.893 باشد،

جریان مافوق صوت خواهد بود و در غیر این صورت از روابط isentropic (فرمول قبل) استفاده می گردد.

$$1 \text{ Knot} = 1.689 \frac{ft}{s} = 1.51 \frac{mile}{hr} = 1.852 \frac{km}{hr} = 0.5144 \frac{m}{s} \quad \text{نکته:}$$

Review of Aerodynamics:

only the concepts related aircraft stability, control & Performance are considered.

a) Force & moments coefficient

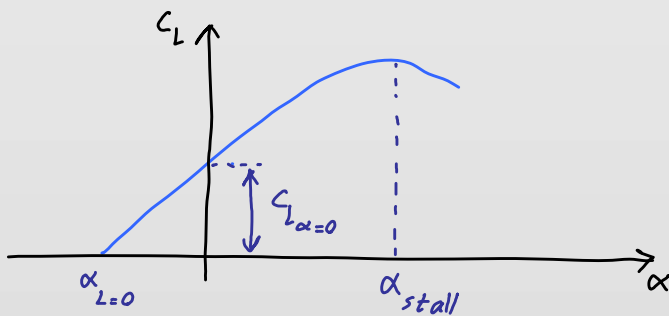
$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho V^2 S L}$$

$$\frac{1}{2} \rho V^2 = q = \frac{1}{2} \rho V_e^2 = q_e$$

b) Lift curve

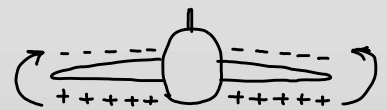


only the linear part is considered.

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L_{\alpha=0}} + C_{L_\alpha} \alpha = C_{L_\alpha} (\alpha - \alpha_{L=0}) \\ &= C_{L_\alpha} \alpha_{abs} \end{aligned}$$

c) finite wing

Due to a pressure difference between upper and lower surfaces.



The air will "leak" around wing tips from high pressure surface & lower surface to low pressure surface & upper surface.

The flow of air from lower to upper surface is called Downwash.

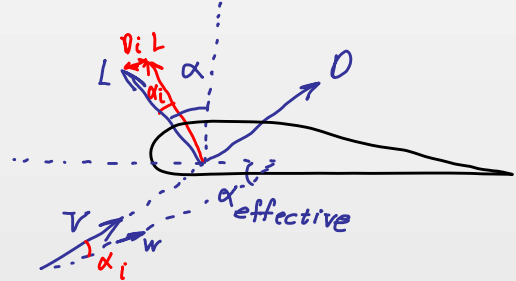
Effects of Downwash:

1. Decreases the effective angle of attack.

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$$

2. Increase the Drag force

$$D_i = L \sin \alpha_i \approx L \alpha_i$$



α_i : depends on the distribution of downwash along the span.

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi A e} \rightarrow \text{span efficient factor}$$

$$C_{D_i} = \alpha_i C_L = \frac{C_L^2}{\pi A e}$$

d) Drag Polar

Drag of a wing = Drag of the wing profile + Drag of the induced profile = Drag + Drag

$$C_{D_{wing}} = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A e} \rightarrow \text{span efficiency factor}$$

airfoil drag

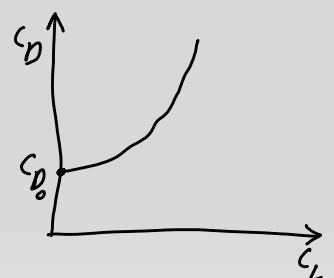
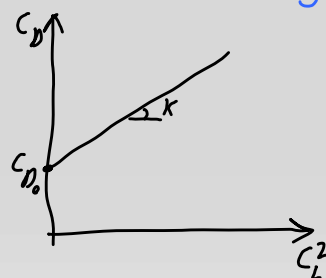
for an aircraft:

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A e_0}$$

Drag Polar

oswald efficiency factor

Drag of an aircraft { Zero lift drag
Drag due to lift



e) stalling speed

Min velocity required to sustain the aircraft in the air.

$C_L = C_{L_{max}}$ Defines the stalling speed

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \quad C_{L_{max}} = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho V_{stall}^2 S} \rightarrow \boxed{V_{stall} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{max}}}}}$$

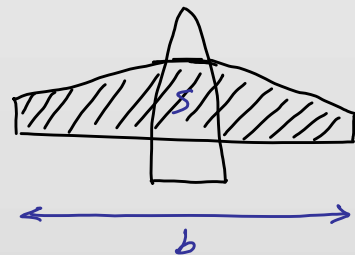
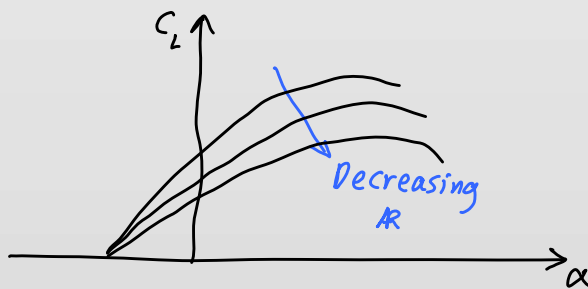
$V_{stall} \propto \frac{1}{\rho}$ at higher altitudes where $\rho \downarrow \rightarrow V_{stall} \uparrow$

در فوای مرتفع و در جاهای گرم مشکل برای take off به وجود می آورد.

some Aerodynamic considerations

1- Effects of aspect ratio

$$R = \frac{b^2}{S}$$

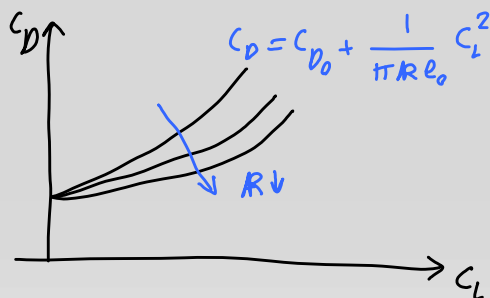


Low Aspect Ratio wings:

1- Lower $C_{L_{max}}$

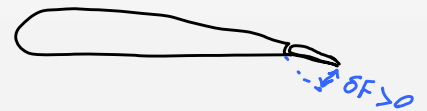
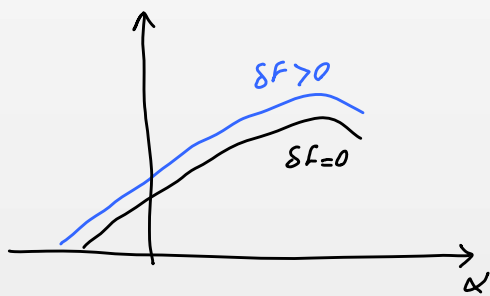
2- higher stall angles

3- get their $C_{L_{max}}$ at higher $\alpha \rightarrow$ must take off and Landing with higher α



$$R \downarrow \rightarrow C_L \uparrow \rightarrow C_D \downarrow$$

2- Flaps



Flap با افزایش camber موجب افزایش Lift می شود.

3- Re number effects

$$Re = \frac{\rho V C}{\mu} = \frac{\text{Inertial force}}{\text{Viscous force}}$$

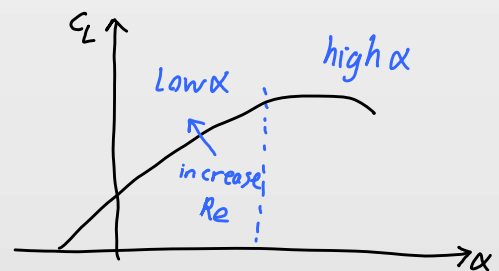
as $Re \downarrow \rightarrow$ viscous forces $\uparrow$

Viscous effects appear in high α zone

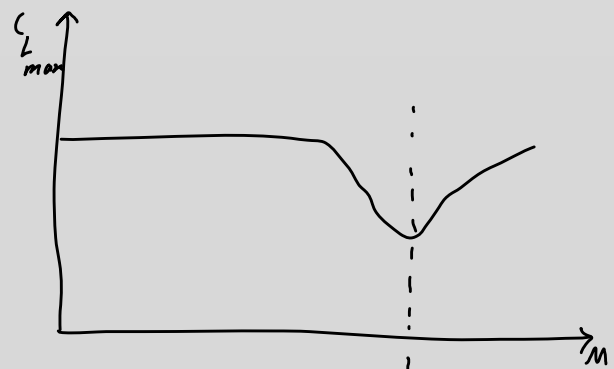
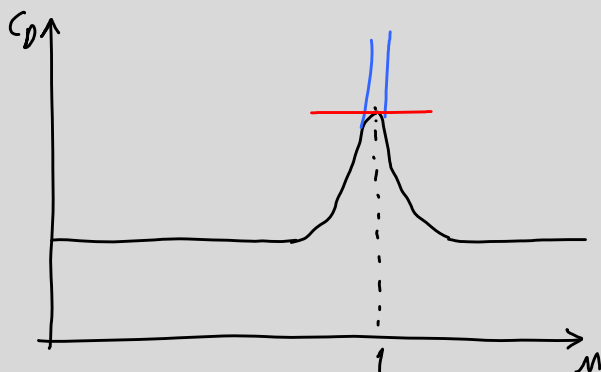
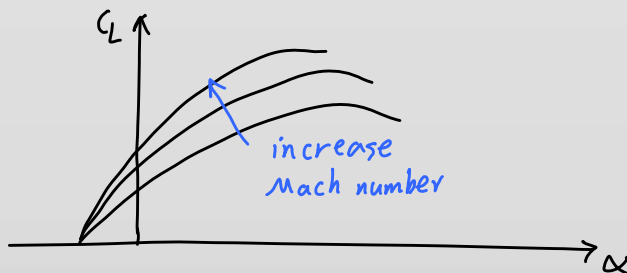
Viscous force $\downarrow \rightarrow L \uparrow$

Inertial force $\uparrow \rightarrow L \uparrow$

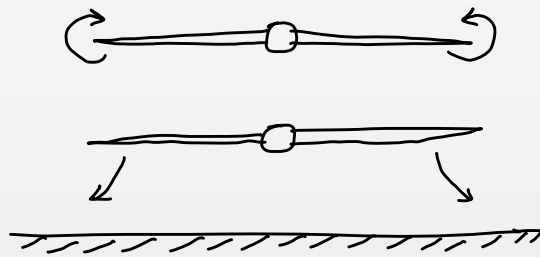
$\Rightarrow$ as $Re \uparrow \rightarrow L \uparrow$



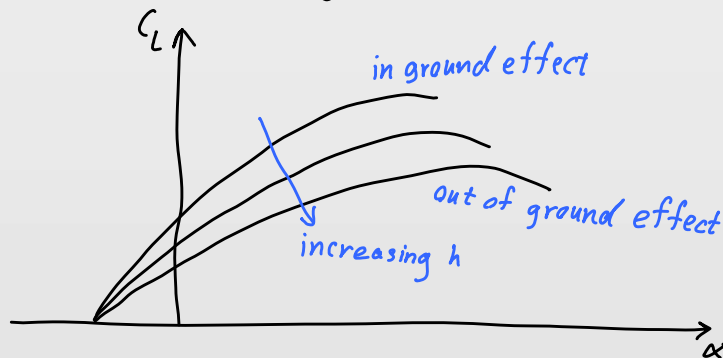
4- compressibility effects



5- Ground effects



Near the ground: Induced Velocity $\downarrow$ $\rightarrow$ Induced drag $\downarrow$ $\rightarrow$ Lift $\uparrow$ "Artificial Lift"



as the aircraft gets closer to the ground:

1- Reduction in tip Vortices $\rightarrow$ induced velocity $\downarrow$ $\rightarrow$ α_i , C_{D_i} $\downarrow$

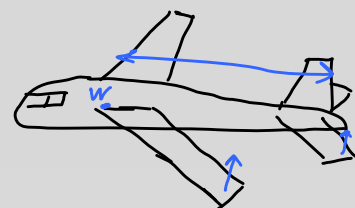
به خاطر اینکه بال بزرگتر در فضا گریخته می شود در نزدیکی زمین $\leftarrow$

for a given C_L , the wing behavior like a higher AR wing

$\Rightarrow$ less α is required to produce the same lift in ground effect.

2- Induced Drag $\downarrow$ in ground effect $\rightarrow$ less power is required

3- Produces a nose down pitching moment



6- Downwash effect

Tip vortex و wake بال جلویی برای بالچه عقبی مشکل بوجود می آورد.

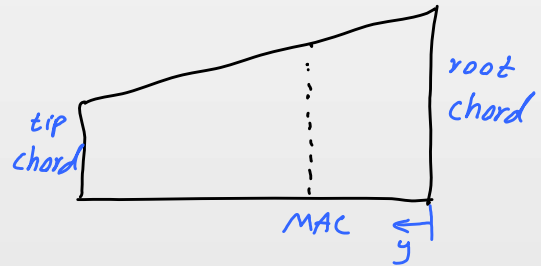
$$M_{wing_{ac}} = \frac{1}{2} \rho V^2 s \bar{c} C_{m_{wing_{ac}}}$$

aerodynamic center

$\bar{c}$ - Mean Aerodynamic Chord (MAC):

It is the chord passing through the wing centroid.

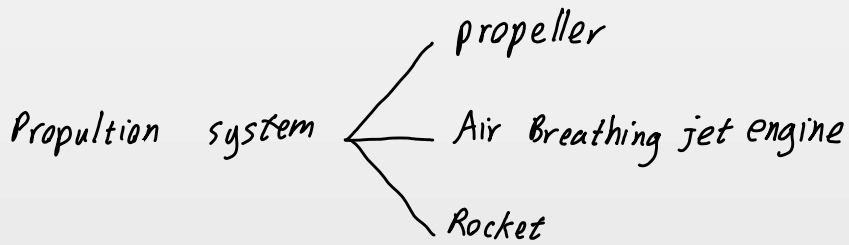
$$MAC = \frac{1}{s_{half}} \int_0^{\frac{b}{2}} c^2(y) dy$$



Propeller theory:

تئوری ملخ

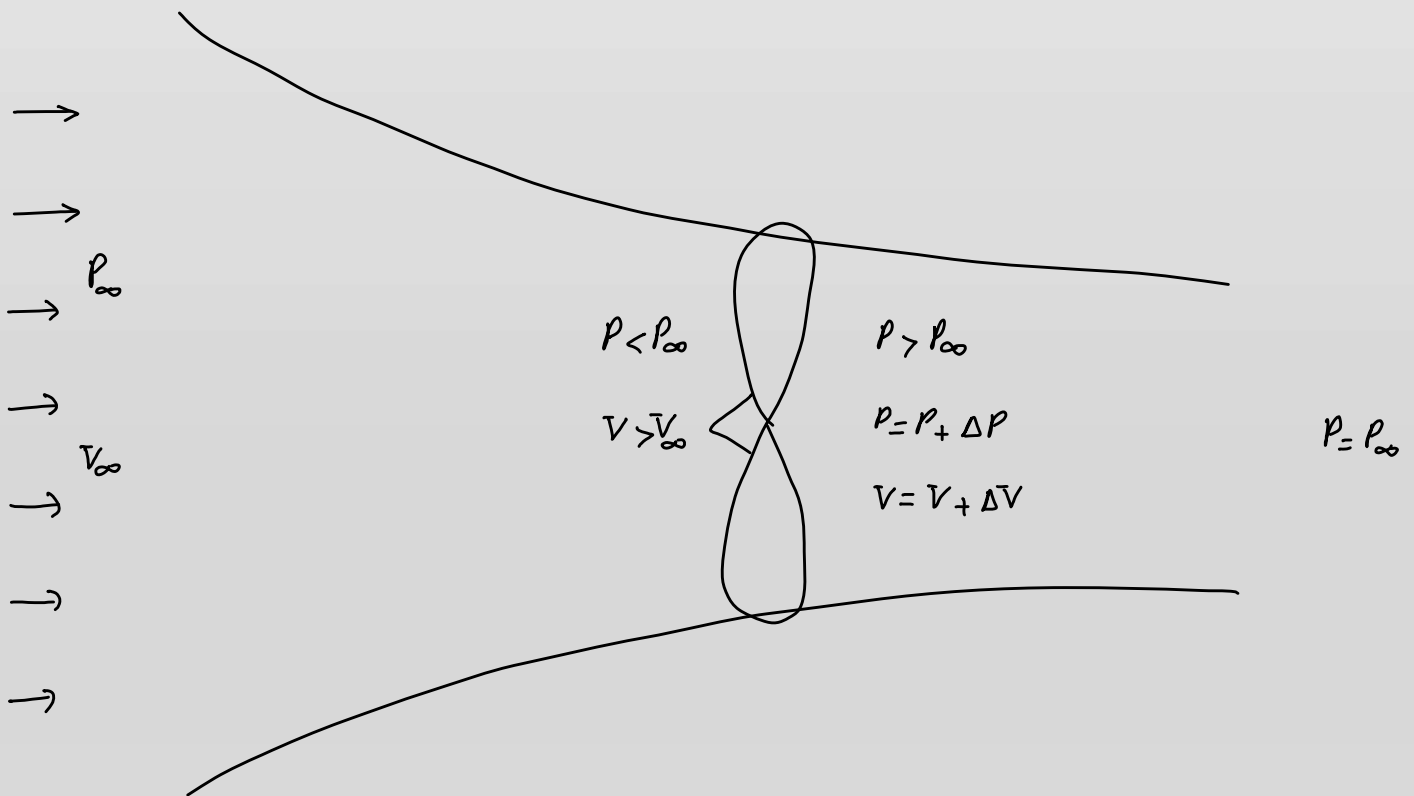
in design procedure after calculating the required power, the designer must select a proper engine.



propeller accelerates a mass of air through its blades $\rightarrow$ The air reaction creates thrust.

Propeller : Imports a small amount of energy to a large amount of air.

Jet : Imports a large amount of energy to a small amount of air.



- Bernoulli equation can be used only along a stream line with const energy
 - Blade adds energy to the fluid particles.
- Bernoulli equation can not be used through the blades but may be used a head and behind it.

تئوری توربین و روابط حاکم بر آن وجود دارد.

- 1- Momentum theory (Rankine Froude theory)
- 2- Blade element theory (BET)

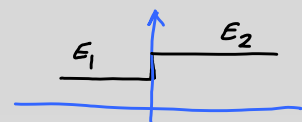
Momentum theory (Rankine Froude theory)

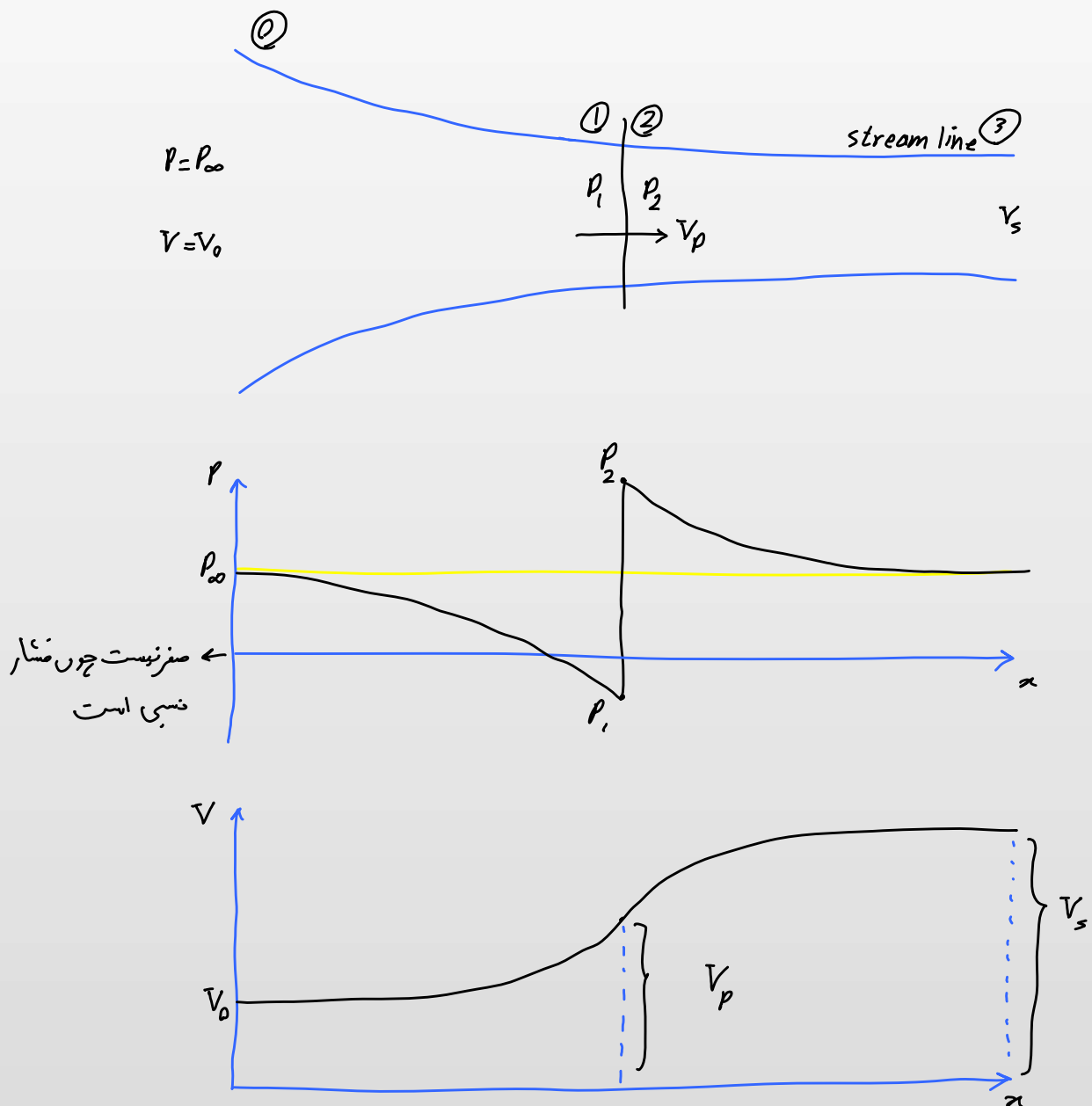
تئوری مومنتم کاری به این مسئله ندارد که سیستم تولید تراست چیست. فرض بر این است که صفحه ای با ضخامت کم وجود دارد که این صفحه مومنتم لازم را برای ایجاد تراست می دهد، به این صفحه، صفحه محوکه ایده آل گویند. در هنگامی که جریان از صفحه ایده آل عبور می کند فشارش از P_1 به P_2 افزایش می یابد.

به فرض جریان ما تراکم ناپذیر باشد برای رسیدن P_2 به P_∞ خطوط جریان سرعت شان افزایش می یابد و خطوط جریان همگرا می شود. به جریان پشت صفحه محوکه ایده آل slip stream می گویند.

Assume that:

- Incompressible flow
- Replace the proper by a rotating Disk $\Rightarrow$
 - infinite no (number) of blades.
 - Pressure due to energy addition is uniform the disk.
- 1D flow جریان یک بعدی
- Energy is const before and after the disk
- $P = P_\infty$ for a head and far behind the disk





between free stream and before (ahead) the disk.

$$\left. \begin{array}{l} \text{continuity } \rho V_0 A_0 = \rho V_p A_1 \\ V_p > V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 < A_0 \rightarrow \text{contraction}$$

between ② and far behind

$$\left. \begin{array}{l} \text{Bernoulli } p_2 + \frac{1}{2} \rho V_p^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_s^2 \\ p_2 > p_\infty \rightarrow V_p < V_s \\ \text{continuity } A_2 V_p = A_3 V_s \end{array} \right\} \Rightarrow A_3 < A_2$$

رابطه برنولی از نقطه ① تا ③ برقرار نیست زیرا به سیستم انرژی دانه ایم و از ① به ② و از ② تا ③ برقرار است

$$P_{01} - \text{total pressure ahead of the disk} = P_1 + \frac{1}{2} \rho V_p^2 = P_\infty + \frac{1}{2} \rho V_0^2$$

$$P_{02} - \text{total pressure behind of the disk} = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_p^2 = P_\infty + \frac{1}{2} \rho V_s^2$$

$$\Delta P_0 = P_{02} - P_{01} = P_2 - P_1 = P_\infty + \frac{1}{2} \rho V_s^2 - [P_\infty + \frac{1}{2} \rho V_0^2] = \frac{1}{2} \rho (V_s^2 - V_0^2)$$

$$\boxed{\Delta P_0 = \frac{1}{2} \rho (V_s^2 - V_0^2)} \quad \text{total pressure change across the disk}$$

$$\text{mass Flux} \quad \dot{m} = \rho A V_p \quad F = \dot{m} \Delta V$$

عکس العمل تغییر مومنتوم جریان خروجی نسبت به جریان ورودی، همان نیروی تراست است.

$$T = \dot{m} \Delta V = \rho A V_p (V_s - V_0) \quad \text{تراست}$$

↓
سطح ملخ - سطح صفحه محرکه ایده آل

از طرف دیگر $F = \Delta P_0 A$ ، بنابراین تراست را می توان به صورت

$$T = \Delta P_0 A = \frac{1}{2} \rho A (V_s^2 - V_0^2)$$

بماوس قرار دادن دو رابطه بالا داریم:

$$\frac{1}{2} \rho A (V_s^2 - V_0^2) = \rho A V_p (V_s - V_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_p = \frac{1}{2} (V_s + V_0)}$$

$$\boxed{V_p = V_0 (1+a)}$$

معمولاً رابطه بالا را به صورت

به a ، Inflow factor (ضریب دخول) می گویند که از مشخصات ملخ است و a عددی مثبت است.

$$\boxed{V_s = V_0 (1+a)}$$

بنابراین از دو رابطه بالایی توان نتیجه گرفت:

$$T = \rho A V_p (V_s - V_0) = 2 \rho A V_0^2 a (1+a)$$

Power & Efficiency:

Input power (P_{in}): power put to the system or rate of increasing the flow energy through the blades. توان تولید کرده یا توان داده شده به صفحه محرکه ایر آل

$$P_{in} = T V_p$$

$$\text{نرخ تغییرات انرژی} = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho A V_p (V_s^2 - V_o^2) = \frac{1}{2} \dot{m} (V_s - V_o)$$

Output power (P_{out}): rate of doing useful work. توان دریافتی

$$P_{out} = T V_o$$

منظور سرعت هواپیماست

Ideal efficiency:

$$\eta_{ideal} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{T V_o}{T V_p} = \frac{2 V_o}{V_s + V_o} = \frac{1}{1 + a}$$

Ideal efficiency is a theoretical concept and is not obtainable in practice due to the following losses:

- Energy loss due to slip stream rotation
- blade profile drag
- Non uniform pressure distribution
- The effects of compressibility

$$\eta = \frac{\text{توان مصرفی واقعی}}{\text{توان تولیدی واقعی}}$$

$$T = 2\rho A V_0^2 a (1+a)$$

$$\frac{T}{A} = \text{Thrust loading}$$

$$\eta_{ideal} = \frac{1}{1+a}$$

To increase $\eta_{ideal} \Rightarrow "a"$ must be decreased in limit $a \rightarrow 0$

$\Rightarrow \eta = 1$ best efficiency $\Rightarrow \frac{T}{A}$ must be minimized

for constant T to have $\frac{T}{A}$ minimum, A must be increased $\Rightarrow$

$$a \rightarrow 0 \Rightarrow A \rightarrow \infty, A = \pi R^2 \Rightarrow R_{blades} \rightarrow \infty \Rightarrow R \uparrow \rightarrow \eta_{ideal} \uparrow$$

Difficulties with long R .

- structured problem
- Ground clearance
- compressibility effect

اگر سرعت $slip\ stream$ زیاد باشد، راندمان کم می شود یعنی هر چه قدر (سرعت عبور V) بیشتر باشد، راندمان کمتر است. چرخش ملخ روست و رژیم جریان در این تئوری اثر ندارد.

$$P_{av} \equiv P_{available} \equiv \text{توان در دسترس} \equiv \text{توان تولیدی}$$

$$P_{req} \equiv P_{required} \equiv \text{توان لازم} \equiv \text{توان مصرفی یا بایند}$$

if $P_{av} = P_{req} \Rightarrow$ متاب دار نیست یعنی تغییرات سرعت نداریم.

if $P_{av} > P_{req} \Rightarrow$ حرکت شتاب دار است.

مثال: ملخی دارای تراسه، 4000 N و سرعت پرواز $V = 120 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می باشد و در سطح دریا در حال پرواز است. اگر قطر ملخ $D = 2.5\text{ m}$ باشد، با کمترین مقدار توان لازم برای این عمل چقدر است. η ایده آل را بدست آورید.

$$f_{sl} = 1.225$$

$$T = 2\rho A V_o^2 a(1+a)$$

$$\rightarrow 4000 = 2 \times 1.225 \times \pi \times 1.25^2 \times 120^2 \times a \times (1+a) \rightarrow a = 0.02259$$

$$\eta_{ideal} = \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1.02259} = 0.9779$$

$$\eta_{ideal} = \frac{P_{out}}{P_{in}}, \quad P_{out} = TV_o = 4000 \times 120 = 480000\text{ W} = 480\text{ kW}$$

$$0.9779 = \frac{480}{P_{in}} \rightarrow P_{in} = 490.848\text{ kW}$$

Example: a propeller with 10ft diameter produces 1000lb thrust at 100mph velocity under standard S.L. conditions. find

a) η_{ideal}

b) The pressure immediately before the blade.

$$T = 2\rho A V_0^2 a(1+a)$$

$$1000 = 2 \times 0.002377 \times \pi \times 5^2 \times (100 \times 1.467)^2 \times a \times (1+a)$$

$$\rightarrow a = 0.11192221$$

$$\eta_{ideal} = \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1.11192221} = 0.8993$$

$$V_0 = 100 \times 1.467 = 146.7 \frac{ft}{s}$$

$$P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_0^2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho V_p^2$$

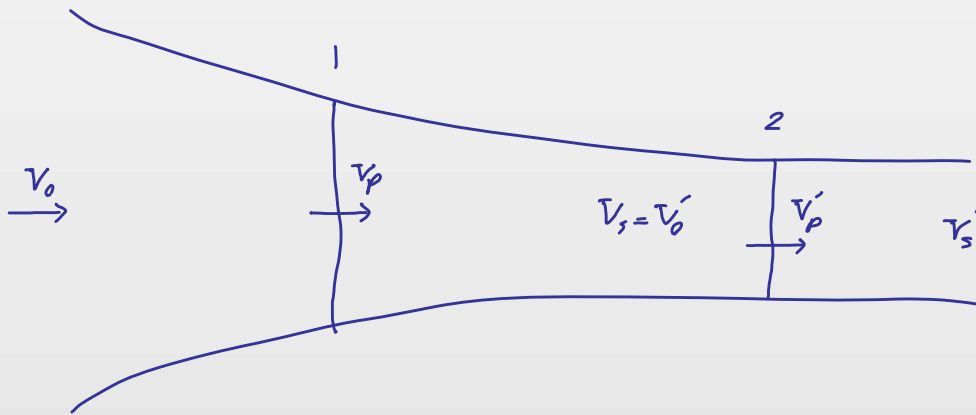
$$V_p = V_0 (1+a) = 146.7 \times (1.11192221) = 163.12 \frac{ft}{s}$$

$$P_{\infty} - P_1 = \frac{1}{2} \rho (V_p^2 - V_0^2) = \frac{1}{2} \times 0.002377 \times (163.12^2 - 146.7^2) = 6.046 \frac{lb}{ft^2}$$

مثال: در صفحه محرکه‌ی ایده‌آل پمپت سرهم قرار دارند، به طوری که *slip stream* صفحه‌ی اولی برای (دوم) جریان بالادستی می‌باشد. اگر $\eta = 0.9$ و $T_1 = T_2 = T$ باشد. مطلوب است:

الف) η_2

ب) راندمان کل سیستم



$$\eta_1 = \frac{1}{1+a_1} \rightarrow 0.9 = \frac{1}{1+a_1} \rightarrow a_1 = \frac{1}{9}$$

$$V_p = V_0(1+a) = V_0\left(1+\frac{1}{9}\right) = \frac{10}{9}V_0$$

$$V_s = V_0' = V_0(1+2a) = V_0\left(1+\frac{2}{9}\right) = \frac{11}{9}V_0$$

$$T_1 = \rho A_1 V_p (V_s - V_0) = \rho A_1 \times \frac{10}{9}V_0 \times \left(\frac{11}{9}V_0 - V_0\right) \rightarrow T_1 = \frac{20}{81} \rho A_1 V_0^2$$

$$T_1 = T_2 \Rightarrow \underbrace{\rho A_1 V_p}_{\dot{m}_1} (V_s - V_0) = \underbrace{\rho A_2 V_p'}_{\dot{m}_2} (V_s' - V_0')$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow V_s - V_0 = V_s' - V_0' \rightarrow V_s - V_0 = V_s' - V_s \rightarrow V_s' = 2V_s - V_0$$

$$\rightarrow V_s' = 2 \times \frac{11}{9}V_0 - V_0 = \frac{13}{9}V_0$$

$$\eta_2 = \frac{2V_0}{V_s' + V_0'} \rightarrow \text{چون هوا پمپا با سرعت } V_0 \text{ در حال حرکت است نه با } V_0'$$

$$\eta_2 = \frac{2V_0}{\frac{13}{9}V_0 + \frac{11}{9}V_0} = \frac{18}{24} = 0.75$$

$$\eta_{\text{کل سیستم}} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{\text{توان دریافتی از سیستم}}{\text{توان ارائه شده به سیستم}}$$

$$P_{out} = TV_0 + TV_0 = 2TV_0$$

$$P_{in} = \frac{TV_0}{\eta_1} + \frac{TV_0}{\eta_2} = \frac{TV_0}{0.9} + \frac{TV_0}{0.75} = \frac{22}{9} TV_0$$

$$\eta_{\text{کل سیستم}} = \frac{2TV_0}{\frac{22}{9} TV_0} = \frac{9}{11} = 0.82$$

آنالیز ابعادی تر است ملخ

$$T = f(D, n, \rho, v, k, V)$$

$$T = \varepsilon D^a n^b \rho^c v^d k^e V^f$$

T : تر است

D : قطر ملخ

n : سرعت دورانی

ρ : دانسیته

v : ویسکوزیته

k : مدول الاستیسیته جعبی سیال

V : سرعت پیسترونی

ε : عدد ثابت فرضی

حال به جای هر یک واحدهای مربوط به آن را قرار می دهیم.

$$MLT^{-2} = L^a \times T^{-b} \times (ML^{-3})^c \times (L^2 T^{-1})^d \times (ML^{-1} T^{-2})^e \times (LT^{-1})^f$$

$$M: 1 = c + e$$

$$L: 1 = a - 3c + 2d - e + f$$

$$T: 2 = b + d + 2e + f$$

a و b و c را بر حسب سه پارامتر دیگر به دست می آوریم.

$$a = 4 - 2e - 2d - f$$

$$b = 2 - d - 2e - f$$

$$c = 1 - e$$

اینها را در معادله اصلی قرار می دهیم:

$$T = \varepsilon D^{4-2e-2d-f} n^{2-d-2e-f} \rho^{1-e} v^d k^e V^f$$

معادله را بر حسب توان گروه بندی می کنیم.

$$T = \varepsilon \rho n^2 D^4 f \left[\underbrace{\left(\frac{v}{D^2 n} \right)}_{\text{توان } d, Re}, \underbrace{\left(\frac{k}{\rho D^2 n^2} \right)}_{\text{توان } e, M}, \underbrace{\left(\frac{V}{D n} \right)}_{\text{توان } f, J} \right]$$

$$a^2 = \frac{k}{\rho} \quad \text{سرعت صوت} \quad V^2 = D^2 n^2$$

J مقدار پیشروی در هر دور است که به آن ضریب پیشروی می‌گویند.

$$T = \varepsilon \rho n^2 D^4 f(Re, M, J) \Rightarrow T = k_T \rho n^2 D^4$$

k_T : ضریب تراست

گشتاور Q عبارتست از تراست T منرب در یک ضریب طولی بنا بر این

$$Q = k_Q \rho n^2 D^5 \quad \text{گشتاور}$$

k_Q : ضریب گشتاور

سرعت زاویه‌ای $\times$ گشتاور = توان تولیدی یا توان داده شده

$$P = Q \times (2\pi n) = \underbrace{2\pi k_Q}_{k_p} n \rho n^2 D^5 = k_p \rho n^3 D^5$$

k_p ضریب توان

سرعت هواپیما $\rightarrow P = T \cdot V$ توان دریافتی یا توان مفید

$$\eta = \frac{\text{توان دریافتی}}{\text{توان داده شده}} = \frac{k_T \rho n^2 D^4 \cdot V}{k_Q \rho n^2 D^5 (2\pi n)} = \frac{1}{2\pi} \frac{k_T}{k_Q} \left(\frac{V}{D n} \right) = \frac{1}{2\pi} \times \frac{k_T}{k_Q} \times J = \frac{k_T}{k_p} J$$

مثال: ملخی در شرایط مختلف دارای مشخصات زیر است

$$D = 3.4 \text{ m}$$

J	1.06	1.19	1.34	1.44
k_Q	1.041	0.04	0.037	0.035
η	0.76	0.8	0.84	0.86

اگر $n = 1250 \text{ RPM}$ و ارتفاع پرواز برابر 3600 m باشد و $\delta = \frac{f}{f_0} = 0.6931$ و مقدار توان تولیدی برابر 790 kW است. مطلوب است:

- نیروی پیشرانشی T

- سرعت پیشروی V

- بازده آیدال η_i

- بازده ملخ η

$$n = 1250 \text{ RPM}, \quad P = 790 \text{ kW} \quad \text{توان تولیدی}$$

$$P = 2\pi n Q \rightarrow Q = \frac{P}{2\pi n} = \frac{790 \times 10^3}{2 \times \pi \times \frac{1250}{60}} = 6035 \text{ N.m}$$

$$Q = k_Q f n^2 D^5, \quad f = \delta f_0$$

$$k_Q = \frac{Q}{f n^2 D^5} = \frac{6035}{0.6931 \times 1250 \times \left(\frac{1250}{60}\right)^2 \times 3.4^5} = 0.036$$

با داشتن k_Q و با استفاده از جدول یابی در جدول راه شده

$$k_Q = 0.036 \Rightarrow \begin{cases} \eta = 0.85 \\ J = 1.39 \end{cases}$$

$$V = J n D = 1.39 \times \frac{1250}{60} \times 3.4 = 98.46 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\eta = \frac{\text{توان مصرفی}}{\text{توان تولیدی}} = \frac{T V}{P} \rightarrow 0.85 = \frac{T \times 98.46}{790 \times 1000} \rightarrow T = 6820 \text{ N}$$

$$T = 2 \rho A V^2 a (1+a)$$

$$\rightarrow 6820 = 2 \times 0.6931 \times 1.2250 \times \pi \times \left(\frac{3.4}{2}\right)^2 \times 98.46^2 \times a \times (1+a)$$

$$\rightarrow a = 0.04372$$

$$\eta_i = \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1.04372} = 0.958$$

مثال: اگر جدولی به فرم زیر داشته باشیم طوری که

J	0.4	0.42	0.44	0.46	0.48
K_T	0.118	0.115	0.112	0.109	0.106
K_Q	0.0157	0.0154	0.015	0.0145	0.0139

و همچنین داریم که

n (RPM)	1800	1900	2000	2100
P_{av} (KW)	1072	1113	1156	1189

قطر ملخ $D=3.05\text{ m}$ است و متی که سرعت هوا به $V=45\frac{\text{m}}{\text{s}}$ و یکفواخت باشد و در سطح دریا پرواز نماید. نیروی رانش ملخ و بازده η را تعیین کنید.

چون سرعت یکفواخت است. بنابراین $P_{req} = P_{av}$ است. با توجه به این نکته P_{req} را برای هر ستون از جدول حساب می‌کنیم.

$$P_{req} = 2\pi n Q$$

$$Q = K_Q f n^2 D^5 = K_Q \times 1.225 \times n^2 \times 3.05^5 = 323.32 K_Q n^2$$

$$P_{req} = 2\pi n \times 323.32 K_Q n^2 = 2031.48 K_Q n^3$$

$$J = \frac{V}{nD} = \frac{45}{n(3.05)} = \frac{14.75}{n}$$

همانطور که از معادله‌های بدست آمده مشخص است بین (دستون آخر $P_{req} = P_{av}$ اتفاق می‌افتد.

حال با استفاده از n و فرمول J میان‌یابی جدول زیر را تکمیل می‌کنیم.

n (RPM)	1800	1900	2000	2100	
P_{av} (kW)	1072	1113	1156	1189	
J	0.492	0.466	0.443	0.422	← از مرمول
k_Q	0.01354	0.01432	0.01493	0.01536	← از میان یابی از جدول
P_{req} (kW)	743	924	1123	1338	← از مرمول

برای پیدا کردن نقطه‌ای که $P_{av} = P_{req}$ باشد، این دو منحنی را در یک مختصات رسم می‌کنیم و محل تقاطع دو منحنی جواب ما می‌باشد.

$$n = 2013$$

$$J = \frac{V}{nD} = \frac{45}{2013 \times 3.05} = 0.44 \quad \rightarrow \quad k_Q = 0.015, \quad k_T = 0.112$$

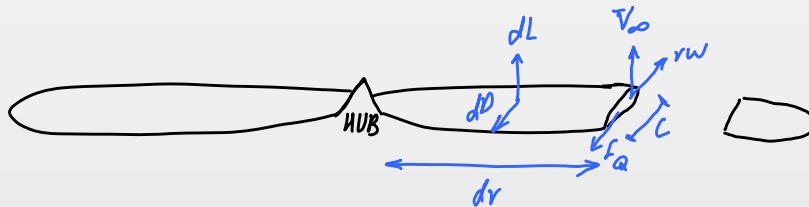
$$T = k_T \rho n^2 D^4 = 0.112 \times 1.225 \times \left(\frac{2013}{60}\right)^2 \times 3.05^4 = 13364 \text{ N}$$

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{k_T}{k_Q} J = \frac{1}{2\pi} \times \frac{0.112}{0.015} \times 0.44 = 0.523$$

Blade element theory (BET)

تئوری المان تیغه

هر ملخ مشابه بال است و دارای دو حرکت خطی و دورانی است.
ملخ ها از ایرفویل ها تشکیل شده اند. مسیر هر ایرفویل یک مارپیچ است.

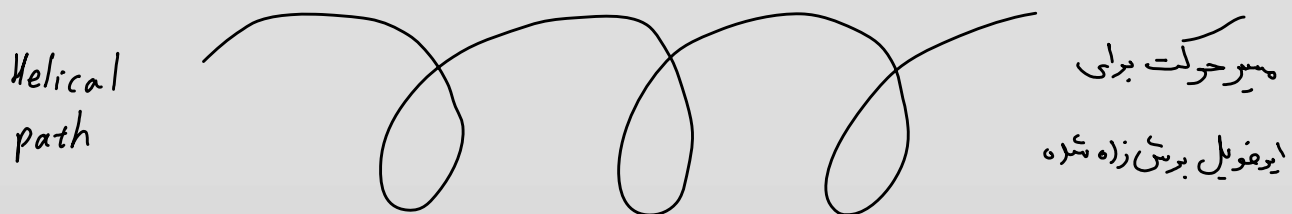


Assume each element is a small wing the following Aerodynamic characteristics:

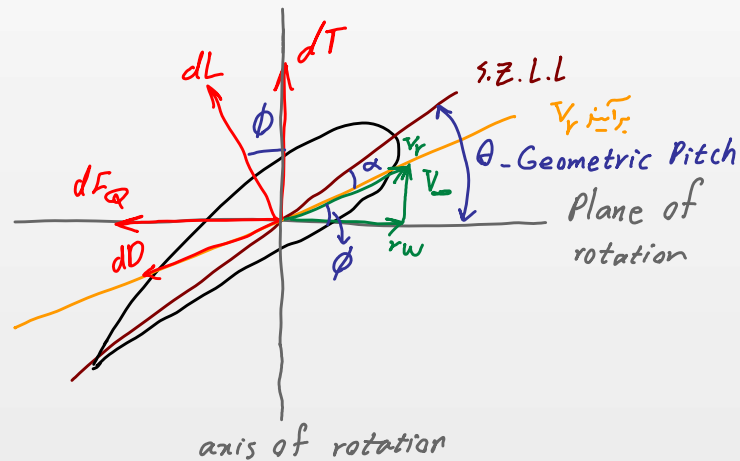
$$dL: \text{incremental sectional Lift} = q s C_L$$

$$dD: \text{incremental sectional Drag} = q s C_D$$

dr در طول ملخ تغییر می کند و هر چه قدر به سمت نوک ملخ پیش می رویم با افزایش سرعت، α و Lift خطی زیاد می شود.



تعریف ابتدایی گام ملخ (Pitch)، مقدار مسافتی است که هواپیما به ازای یک دور چرخش ملخ جلو می رود.
هنگامی که ملخ هواپیما با سرعت 2000 RPM می چرخد و هواپیما در ابتدای بانایستاده پس طبق این تعریف گام صفر است و یا در حالتی که کلا بد یا موتور خاموش می باشد باید گام صفر باشد. اما این تعریف کار بری نیست.



sectional zero lift line (s.z.l.l.): a line along which, the velocity component creates no lift.

Geometric pitch - θ : the angle between plane of rotation & s.z.l.l.

$\theta \equiv$ Blade Angle

Effective pitch - ϕ : the angle between plane of rotation and the resultant velocity.

$\phi \equiv$ Helix Angles

زاویه $\theta = \phi + \alpha$ وضعیت هندسی موقعیت قرارگیری ایرفویل را نسبت به صفحه ملخ نشان می‌دهد. اگر در ملخ مقطع متغیر و ایرفویل‌ها دارای زاویه متغیر باشند برای بدست آوردن گام هندسی یک ملخ $r = 0.7$ قرار می‌دهیم که در واقع به این مقطع *geometric Mean Pitch* می‌گویند.

در یک ملخ ساخته شده تنها طریق تغییر گام، تغییر زاویه حمله می‌باشد که این عمل را به وسیله *Governor* انجام می‌دهند.

$$P = 2\pi r \tan \theta \quad \text{گام}$$

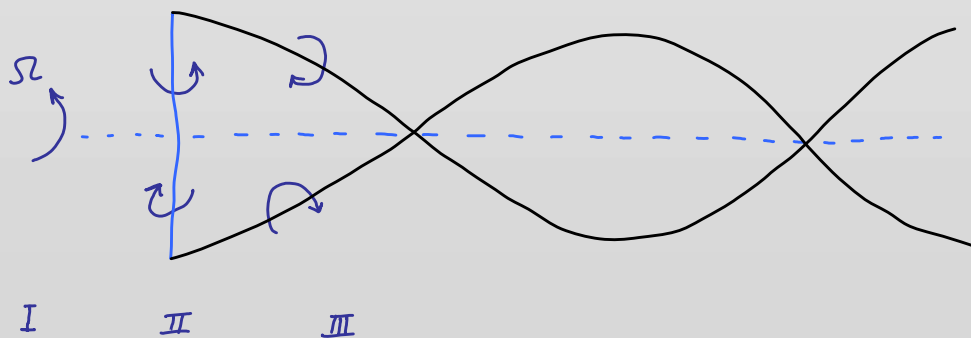
هرچه قدر زاویه θ بیشتر باشد، ملخ دارای گام درشت تر است و هرچه زاویه θ کمتر باشد، ملخ دارای گام ریزتر است.

مقایسه گام درشت و گام ریز: در شروع حرکت γ کوچک است (سرعت گذرنده از صفحه ایده آل)، بنابراین زاویه حمله برای ملخ گام ریز که زاویه حمله پروازی آن بزرگ است، زاویه مناسبی است اما برای ملخ گام درشت احتمالاً در این حالت زاویه حمله از زاویه حمله $stall$ بزرگتر است پس $Lift$ کم و $Drag$ زیادی شود اما در سرعت های بالا وضعیت برعکس است. بنابراین بهتر است که ملخ را با گام متغیر بسازیم.

گام فوق درشت feathering هنگام از کار افتادن موتور هواپیما

گام فوق ریز Reverse Thrust هنگام Landing

دومین تئوری که در مورد ملخ وجود دارد تئوری المان تیغه است که بر اساس تئوری $Vortex$ ها است، ملخ نیرمانند بال دارای $Bound vortex$ & $Trailing vortex$ است، فرضی که ملخ با بال دار در این است که ملخ دارای حرکت دورانی نیز می باشد، بنابراین مسیر حرکت $Trailing vortex$ ها و $Bound vortex$ ها به صورت مارپیچی است.



اگر سرعت القایی ناشی از $Bound vortex$ را با مقدار فرضی $\pm B\Omega$ نشان می دهیم.
اگر سرعت القایی ناشی از $Trailing vortex$ را با مقدار فرضی $b\Omega$ نشان می دهیم.

* در قسمت I، جلوی ملخ هیچ گونه سرعت دورانی نداریم زیرا سرعت ها در بالا و پایین همدیگر را خنثی می کنند.

بنابراین در جلوی صفحه ملخ
$$b\Omega - B\Omega = 0 = \text{سرعت دورانی} \Rightarrow b = B$$

* در روی صفحه II، به خاطر *Trailing vortex*، سرعت زاویه ای دورانی داریم. (*Bound vortex* روی صفحه

خودشان سرعت القاء نمی کنند). بنابراین در صفحه II تنها اثر *Trailing vortex* وجود دارد بنابراین

$$b\Omega = \text{سرعت دورانی}$$

* در قسمت III، هم *Trailing vortex* داریم و هم *Bound vortex* و سرعت زاویه ای هم جهت با جهت

حرکت ملخ ایجاد می گردد که موی تراز سرعت روی صفحه II است.

$$\text{سرعت دورانی} = b\Omega + B\Omega = 2b\Omega$$

به b ضریب تداخلی دورانی گوئیم، b همواره عددی مثبت و در حدود صدم است.

Diagram illustrating the derivation of the torque formula for a curved beam. The diagram shows a curved beam with a central axis and a neutral axis. A force vector F is applied at a distance r from the neutral axis. The force is decomposed into components $F \sin \alpha$ and $F \cos \alpha$. The moment arm for the $F \sin \alpha$ component is $r \sin \alpha$, and for the $F \cos \alpha$ component is $r \cos \alpha$. The resulting torque is the sum of the moments of these components. The diagram also shows the relationship between the angle α and the angle ϕ , and the relationship between the radius r and the distance from the neutral axis to the point of application of the force, $r(L-b)$.

۴: زاویه نیروی $lift$ بانیروی برآیند δR

$$\frac{\delta Q}{r} = \delta R \pm (\phi + \gamma)$$

$$\eta = \frac{V \delta T}{\Omega \delta Q} = \frac{V \cos(\phi + \gamma)}{\Omega r L (\phi + \gamma)} = \frac{V}{\Omega r} \frac{1}{\tan(\phi + \gamma)} = \frac{1-b}{1+a} \frac{\tan \phi}{\tan(\phi + \gamma)}$$

B: تعداد پره ها

C: chord

$$\begin{cases} \delta L = \overbrace{BC \delta r}^{\text{مساحت}} \times \frac{1}{2} \rho V_r^2 C_L \\ \delta D = BC \delta r \times \frac{1}{2} \rho V_r^2 C_D \end{cases}$$

$$\delta T = \delta L \times \cos \phi - \delta D \times \sin \phi = B.C \delta r \times \frac{1}{2} \rho V_r^2 (C_L \cos \phi - C_D \sin \phi)$$

$$\frac{\delta T}{\delta r} = B.C \times \frac{1}{2} \rho V_r^2 (C_L \cos \phi - C_D \sin \phi) \quad \text{مرتبه تراست Thrust grading}$$

که نشان دهنده این است که در این ملخ، این ایرفویل مشخص چه مقدار تراست تولید می کند.
رابطه بالا را هم می توان بر حسب solidity هم بنویس داد.

$$\frac{\delta T}{\delta r} = 2\pi r \delta \times \frac{1}{2} \rho V_r^2 (C_L \cos \phi - C_D \sin \phi)$$

$$\frac{dT}{dr} = \pi r \delta \rho V_r^2 C_L (\cos \phi - \tan \delta \sin \phi)$$

چون در شرایط کاری ملخ ها $\frac{C_D}{C_L}$ کوچک است در نتیجه: $\cos \delta \rightarrow 1$, $\tan \delta \rightarrow 0$

$$\frac{dT}{dr} = \pi r \delta \rho V_r^2 C_L \cos(\phi + \delta) , \quad t = C_L \cos(\phi + \delta)$$

$$\frac{dT}{dr} = \pi r \delta \rho V_r^2 t \quad \text{برای کل پره های ملخ در فاصله } r$$

$$\frac{dT}{dr} = C \times \frac{1}{2} \rho V_r^2 t \quad \text{برای یک پره}$$

به طریق مشابه برای Torque grading

$$\frac{dQ}{dr} = \pi r^2 \delta \rho V_r^2 q \quad \text{برای کل پره ها , } q = C_L \sin(\phi + \delta)$$

$$\frac{dQ}{dr} = C r \times \frac{1}{2} \rho V_r^2 q \quad \text{برای یک پره}$$

این روابط کاربرد زیادی نیستند، به علت مجهولات زیادی که وجود دارد. لذا از یک روش ساده تر مقدار Torque grading و Thrust grading را بدست می آوریم.

دانشیه $\dot{m} = \text{سرعت چرخش} \times \text{سطح چرخش}$

$$\dot{m} = 2\pi r \times \delta r V (1+a) \times \rho$$

$$\delta T = \dot{m} \Delta V$$

$$\Delta V = V_s - V = V (1+2a) - V = 2aV$$

$$\delta T = 4\pi r \rho \delta r V^2 a (1+a)$$

$$\frac{\delta T}{\delta r} = 4\pi r \rho V^2 a (1+a)$$

این رابطه را با رابطه قبلی (برای کل پره‌ها) مساوی قرار می‌دهیم و با توجه به اینکه

$$V_r = \frac{V(1+a)}{2 \cdot \phi} \quad 4\pi r \rho V^2 a (1+a) = \pi r \delta t \rho \frac{V^2 (1+a)^2}{2 \cdot \phi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+a} = \frac{1}{4} \frac{\delta t}{2 \cdot \phi}$$

از طرفی دیگر

$$\delta Q = m_x \Delta \Omega x r^2$$

$\Delta \Omega = 2b\Omega$ تغییرات سرعت زاویه‌ای از 0 تا $2b\Omega$

$$\delta Q = 2\pi r \times \delta r V (1+a) \times \rho \times 2b\Omega \times r^2$$

$$\delta Q = 4\pi r^3 \rho V b (1+a) \Omega \delta r$$

$$\frac{\delta Q}{\delta r} = 4\pi r^3 \rho V b (1+a) \Omega \quad \text{برای کل پره‌ها}$$

این رابطه را با رابطه قبل درست آورده برای Torque grading مساوی قرار می‌دهیم.

$$4\pi r^3 \rho V b (1+a) \Omega = \pi r^2 \delta q \rho V_r^2$$

$$4\pi r^3 \rho V b (1+a) \Omega = \pi r^2 \delta q \rho \underbrace{\frac{V(1+a)}{2 \cdot \phi}}_{V_r} \cdot \underbrace{\frac{\Omega r (1-b)}{\cos \phi}}_{V_r}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{1-b} = \frac{1}{2} \delta q \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \phi} \Rightarrow \frac{b}{1-b} = \frac{1}{4} \delta q \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \phi}$$

می‌توان راندمان رانیز محاسبه کرد:

$$\eta = \frac{V \delta T}{\Omega \delta Q} = \frac{V}{\Omega} \times \frac{\frac{\delta T}{\delta r}}{\frac{\delta Q}{\delta r}} = \frac{V}{2\pi n} \times \frac{\frac{dT}{dr}}{\frac{dQ}{dr}} = \frac{V}{2\pi n} \cdot \frac{\pi r \delta t \rho V_r^2}{\pi r^2 \delta q \rho V_r^2} = \frac{V}{2\pi n r} \cdot \frac{t}{q}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{V}{2\pi n r} \times \frac{1}{\tan(\phi + \gamma)}$$

مثال: در شعاع 1.2m از یک ملخ 4 پره ($\beta=4$) که قطر آن 3.5m است ($D=3.5m$) در این نقطه chord

$c=250mm$ و گام 4.4m و شیب منحنی برا $a_i=0.1$ و $\frac{c_t}{c_b}=50$ برای پروازی که در ارتفاع 4600m است

($\delta=0.629$) و درجه حواست هم برابر $-14.7^\circ C$ و دارای سرعتی برابر $\frac{67m}{s}$ می باشد، اگر سرعت دورانی ملخ

دارای $n=1500rpm$ باشد. مطلوب است $\frac{dQ}{dr}$ و $\frac{dT}{dr}$ و η برای شعاع 1.2m

$$\delta = \frac{BC}{2\pi r} = \frac{4 \times 0.25}{2\pi \times 1.2} = 0.13263$$

$$\tan \gamma = \frac{c_b}{c_t} = \frac{1}{50} \rightarrow \gamma = 1.146^\circ$$

$$P = 2\pi r \tan \theta \rightarrow 4.4 = 2\pi \times 1.2 \times \tan \theta \rightarrow \theta = 30.27^\circ$$

$$\tan \phi = \frac{V(1+a)}{\Omega r(1-b)} = \frac{67 \times (1+a)}{2 \times \frac{1500}{60} \times \pi \times 1.2 \times (1-b)} = 0.3554 \frac{(1+a)}{(1-b)}$$

چون تعداد مجهولات زیاده است از سعی و خطا استفاده می کنیم.

$$a=0.1, \quad b=0.02$$

برای شروع فرض می کنیم:

$$\tan \phi = 0.3554 \times \frac{1.1}{0.98} = 0.3989 \rightarrow \phi = 21.75^\circ$$

$$\alpha = \theta - \phi = 30.27 - 21.75 = 8.52$$

چک می کنیم جریان تراکم پذیر است یا تراکم ناپذیر

$$V_r = \frac{V(1+a)}{\sin \phi} = \frac{67 \times 1.1}{\sin 21.75} = 199 \frac{m}{s}$$

$$M = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\gamma R T}} = \frac{199}{\sqrt{1.4 \times 287 \times 258.45}} = 0.618 > 0.3 \rightarrow \text{compressible}$$

$$a_c = \frac{a_i}{\sqrt{1-M^2}} = \frac{0.1}{\sqrt{1-0.618^2}} = 0.1272 \rightarrow \text{incompressible}$$

$$c_l = \alpha \cdot a_c = 8.52 \times 0.1272 = 1.084$$

$$z = c_l \cos(\phi + \gamma) = 1.084 \times \cos(21.75 + 1.146) = 1$$

$$q = c_l \sin(\phi + \gamma) = 1.084 \times \sin(21.75 + 1.146) = 0.422$$

در اینجا باید یک کنیم که a و b انتخابی قابل قبول است یا خیر. از روابطی که مستقر برای a و b بدست می آوریم اگر با a و b اول برابر شد، جواب قابل قبول است.

$$\frac{a}{1+a} = \frac{1}{4} \cos \phi \frac{1}{2.2\phi} \rightarrow \frac{a}{1+a} = \frac{1}{4} \times 0.13263 \times 1 \times \frac{1}{2.2 \times 21.75} \rightarrow a = 0.318$$

$$\frac{b}{1-b} = \frac{1}{2} \cos q \frac{1}{2.2\phi} \rightarrow \frac{b}{1-b} = \frac{1}{2} \times 0.13263 \times 0.422 \times \frac{1}{2.2 \times 21.75} \rightarrow b = 0.039$$

چون a و b برابر با a و b قبلی نیست باید a و b جدید حدس می زنیم می توان a و b آخر را به عنوان حدس جدید استفاده کنیم. گاهی اوقات بین دو جواب نوسان می کند که در این صورت وسط دو جواب را جایگزینی می کنیم.

$$a = 0.190202 \quad b = 0.0311446 \quad a \text{ و } b \text{ نهایی این اعداد هستند}$$

$$\tan \phi = 0.3554 \times \frac{1+0.190202}{1-0.0311446} = 0.4366 \rightarrow \phi = 23.586^\circ$$

$$\alpha = \theta - \phi = 30.27 - 23.586 = 6.684$$

$$V_r = \frac{V(1+a)}{2.2\phi} = \frac{67 \times (1+0.190202)}{2.2 \times 23.586} = 199.3 \frac{m}{s}$$

$$M = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\gamma RT}} = \frac{199.3}{\sqrt{1.4 \times 287 \times 258.45}} = 0.6 > 0.3 \rightarrow \text{compressible}$$

$$\alpha_c = \frac{\alpha_i}{\sqrt{1-M^2}} = \frac{0.1}{\sqrt{1-0.6^2}} = 0.125 \rightarrow \text{incompressible}$$

$$C_L = \alpha \cdot \alpha_c = 6.684 \times 0.125 = 0.8355$$

$$z = C_L \cos(\phi + \delta) = 0.8355 \times \cos(23.586 + 1.146) = 0.7589$$

$$q = C_L 2.2(\phi + \delta) = 0.8355 \times 2.2(23.586 + 1.146) = 0.3496$$

$$f = 0.629 \times 1.225 = 0.770525$$

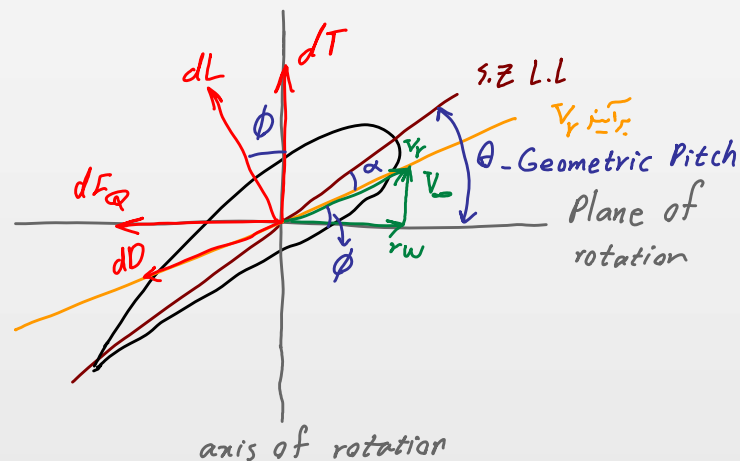
$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2} \rho V_r^2 C t = 0.5 \times 0.770525 \times 199.3^2 \times 0.25 \times 0.7589 = 2903 \frac{N}{m}$$

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{1}{2} \rho V_r^2 C r q = 0.5 \times 0.770525 \times 199.3^2 \times 0.25 \times 1.2 \times 0.3496 = 1604 \frac{N}{m}$$

$$\eta = \frac{V}{2\pi n r} \frac{t}{q} = \frac{67}{2\pi \times \frac{1500}{60} \times 1.2} \times \frac{0.7589}{0.3496} = 0.772$$

Blade element Theory (BET)

روشن دیگر



Forces acting on a blade:

dL : sectional incremental Lift $\perp V_r$

dD : sectional incremental Drag $\parallel V_r$

dT : sectional incremental Thrust $\parallel V_\infty$

dF_Q : sectional incremental Force acting in plane of rotation $\perp V_\infty$

(it produces the torque required to drive the blade)

dQ : sectional incremental torque $= r dF_Q$

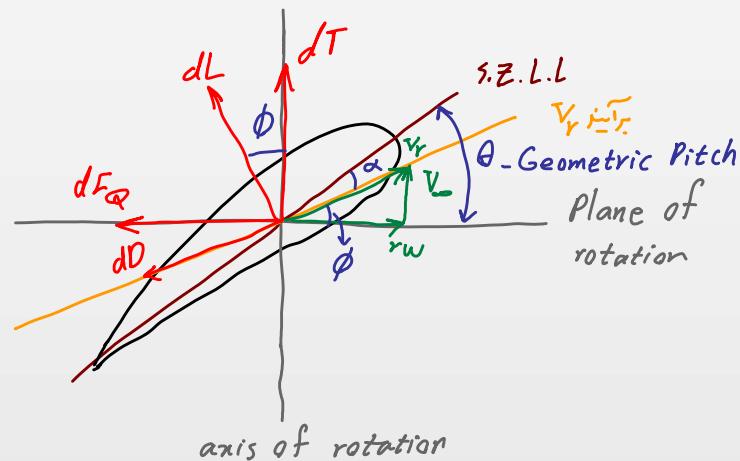
$$\begin{cases} dT = dL \cos \phi - dD \sin \phi \\ dF_Q = dD \cos \phi + dL \sin \phi \\ dQ = r dF_Q \end{cases}$$

Define: Thrust coeff: $C_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 (\pi r^2)}$

Torque coeff: $C_Q = \frac{Q}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 (\pi r^2) r}$

Blade element Theory (BET)

روشنی دیگر



Forces acting on a blade:

dL : sectional incremental Lift $\perp V_r$

dD : sectional incremental Drag $\parallel V_r$

dT : sectional incremental Thrust $\parallel V_\infty$

dF_Q : sectional incremental Force acting in plane of rotation $\perp V_\infty$

(it produces the torque required to drive the blade)

dQ : sectional incremental torque $= r dF_Q$

$$\begin{cases} dT = dL \cos \phi - dD \sin \phi \\ dF_Q = dD \cos \phi + dL \sin \phi \\ dQ = r dF_Q \end{cases}$$

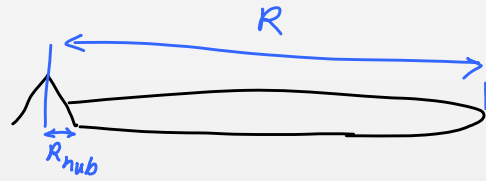
Define: Thrust coeff: $C_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 (\pi r^2)}$

Torque coeff: $C_Q = \frac{Q}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 (\pi r^2) r}$

Blade Performance:

$$T = \rho \int_{R_{hub}}^R \frac{C_L \cos \phi - C_D \sin \phi}{\sin^2 \phi} c dr$$

$$Q = \rho \int_{R_{hub}}^R \frac{C_D \cos \phi + C_L \sin \phi}{\sin^2 \phi} c r dr$$



Define Blade efficiency:

$$\eta = \frac{\text{useful Power out}}{\text{input power}} = \frac{V_{\infty} dT}{r \omega dF_Q} = \frac{V_{\infty}}{\omega} \frac{dT}{dQ}$$

$$\eta = \frac{V_{\infty}}{\omega} \frac{dT}{dQ} = \frac{V_{\infty}}{r \omega} \frac{C_L \cos \phi - C_D \sin \phi}{C_L \sin \phi + C_D \cos \phi}$$

to have Max η $\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial (\frac{C_L}{C_D})} = 0 \end{cases}$

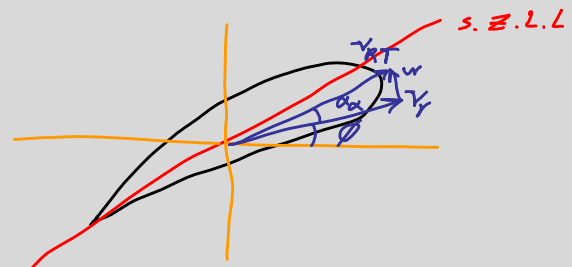
skipping math $\begin{cases} \text{The conditions to have } \eta_{\max} : (\frac{C_L}{C_D})_{\max} \\ \phi_{opt} = 45 - \frac{57.3}{2} \cdot \frac{1}{(\frac{C_L}{C_D})_{\max}} \end{cases}$

Vortex induced Effects:

- use define wing data C_L & C_D instead of airfoil C_L & C_D
- Experiences have shown that assumming $R=6$ is a good approximation is BET.

$$C_L \text{ for a 3D wing} = C_{L\alpha} \alpha$$

$$C_{L\alpha}^{\text{wing}} = \frac{C_{L\alpha}^{\text{airfoil}}}{1 + \frac{57.3}{6\pi} C_{L\alpha}^{\text{airfoil}}}$$



$$C_D = C_{D_0} + k C_L^2$$

Design Procedure:

airfoil section + mission $\rightarrow \eta_{\max}$ $\begin{cases} \text{max } T \\ \text{min } Q \end{cases}$

V_∞ , number of blades, blade section aerodynamics data (c_L, c_D), blade geometry are known $\Rightarrow$ must check if $\eta = \eta_{\max}$

1- use blade sectional data to calculate c_L and c_D for different α_α

2- find $\left(\frac{c_L}{c_D}\right)_{\max}$

$$\frac{c_D}{c_L} = \frac{c_{D_0} + k c_L^2}{c_L} \rightarrow \frac{c_L}{c_D} = \frac{c_L}{c_{D_0} + k c_L^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{c_L}{c_D}\right)}{\partial (c_L)} = 0 \rightarrow \frac{c_{D_0} + k c_L^2 - 2k c_L^2}{(c_{D_0} + k c_L^2)^2} = 0$$

$$\rightarrow c_{D_0} + k c_L^2 - 2k c_L^2 = 0 \rightarrow c_L = \sqrt{\frac{c_{D_0}}{k}} = \sqrt{\pi R e_0 c_{D_0}}$$

$$\rightarrow c_D = c_{D_0} + k c_L^2 = 2c_{D_0}$$

$$\rightarrow \left(\frac{c_L}{c_D}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{\pi R e_0}{4 c_{D_0}}}$$

$$\alpha_a = \frac{c_L}{c_{L\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi R e_0 c_{D_0}}}{c_{L\alpha}}$$

3- For a given r , we have $\phi(r) \Rightarrow$ we have an α_a $\begin{cases} c_L \\ c_D \end{cases}$

Knowing $\phi(r) = \tan^{-1} \frac{V_\infty}{r\omega}$ $\rightarrow$ calculate dT and dQ

$$dQ = q_c \frac{c_D \cos \phi + c_L \sin \phi}{r^2 \phi} r dr$$

$$dT = q_c \frac{c_L \cos \phi - c_D \sin \phi}{r^2 \phi} dr$$

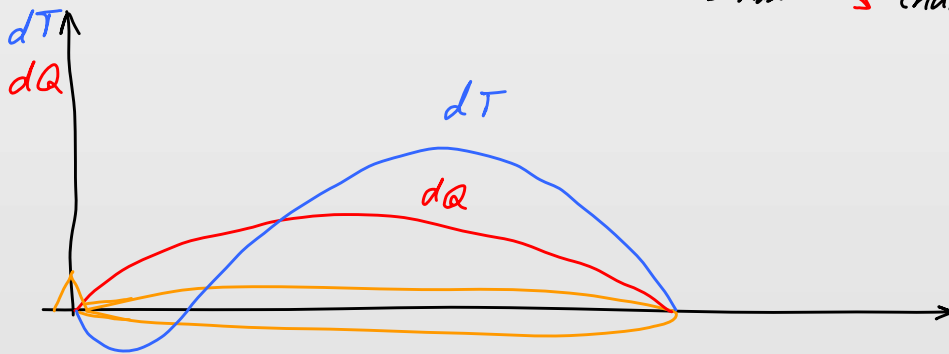
4- Integrate to get T and Q

5- T is known as a function of r , $T=T(r)$, calculating $\frac{dT}{dr}=0$

get the $\bar{r}$ where $T=T_{max}$

6- Put this $\bar{r}$ in to $\phi(r)=\tan^{-1} \frac{V_{\infty}}{r\omega}$ and calculate $\phi(\bar{r})$

check if $\phi = \tan^{-1} \frac{V_{\infty}}{r\omega} \stackrel{?}{=} \phi_{opt} = 45 - \frac{57.3}{2} \cdot \frac{1}{(\frac{C_L}{C_D})_{max}}$ yes we have $\eta_{max} = \frac{T V_{\infty}}{Q \omega}$ no change the airfoil



Propeller parameters:

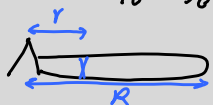
1- Blade efficiency = $\frac{\text{useful power out}}{\text{input powers}} = \frac{T V_{\infty}}{Q \omega}$

2- Thrust & power coeff: C_T & C_Q

3- Advanced Ratio $J = \frac{\text{Blade forward (vertical motion)}}{\text{circulation motion}} = \frac{V_{\infty} t}{r \omega t} = \frac{V_{\infty}}{r \omega}$

4- Activity factor, AF : The ability of blades to absorb the input power.

$$AF = \frac{10^5}{16} \int_0^1 \left(\frac{C}{D}\right) x^3 dx$$



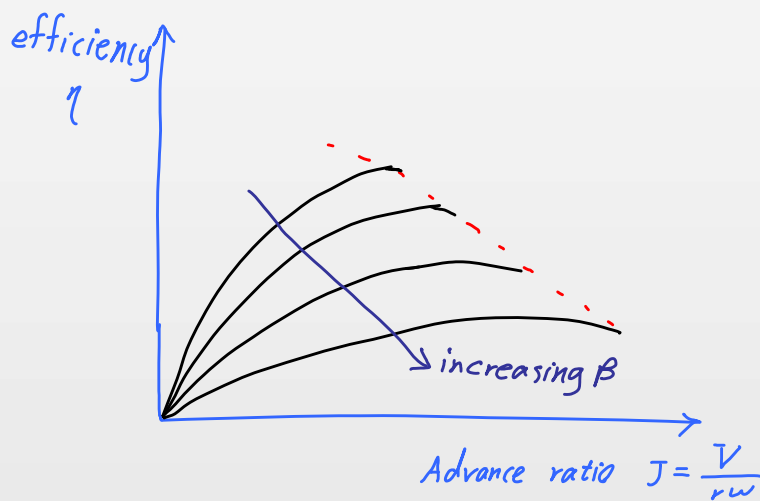
$$x = \frac{r}{R}$$

$\left\{ \begin{array}{l} D \text{ is the blade diameter} \\ C \text{ is the local chord at each station } x \end{array} \right.$

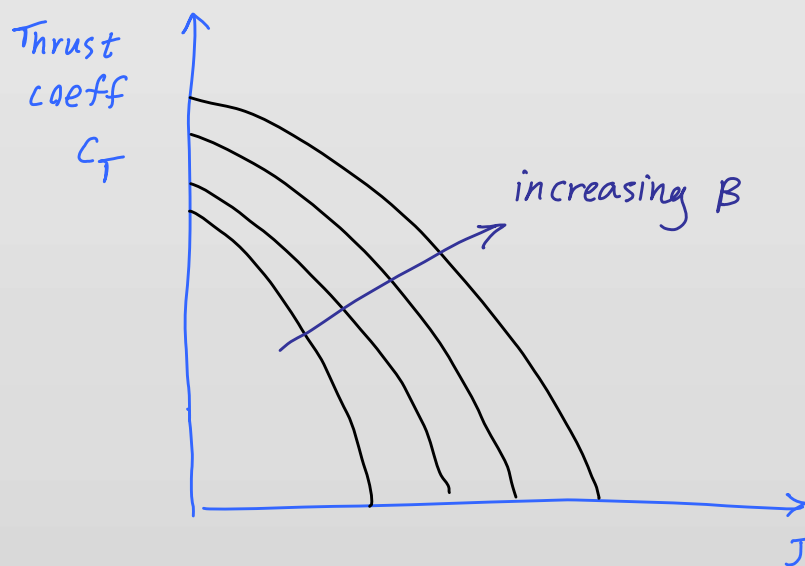
5- solidity, $\sigma = \frac{\text{Blade Area}}{\text{Swept Area}} = \frac{n R \bar{C}}{\pi R^2}$ number of blades



Blade charts:



for a fixed β as $J \uparrow \Rightarrow \eta \uparrow$



for a fixed J : $\beta \uparrow \Rightarrow C_T \uparrow$

for a fixed β : $J \uparrow \Rightarrow C_T \downarrow$

During flight J changes so to have a const C_T , β must be controlled.

نیروی پیشران در هواپیما توسط موتور تولید می‌گیرد. موتور انواع مختلف دارد

- توربوجت

- پیستونی

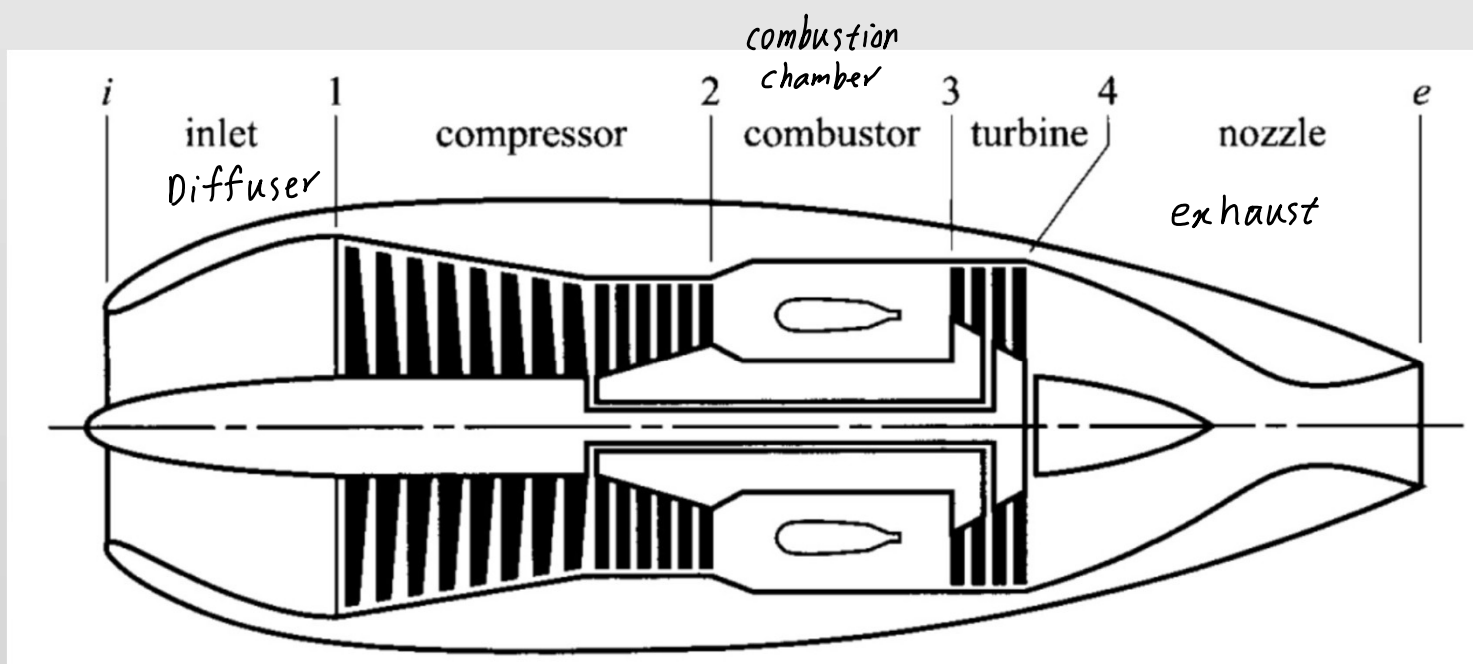
- توربوپراپ

- توربومکن

- رم جت

- موتور راکت (در برخی موارد در هواپیما استفاده می‌شود)

توربوجت:

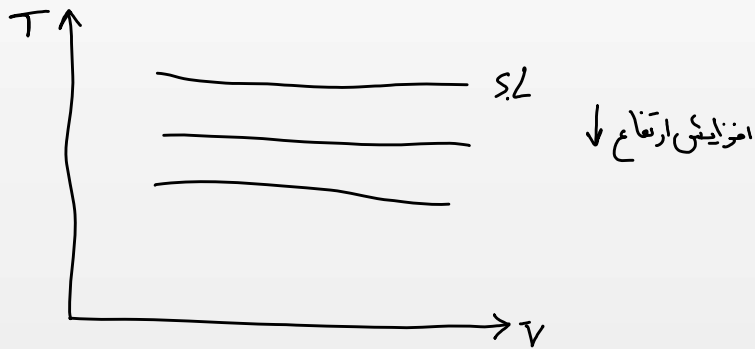


تراست موتور توربوجت $T = T(h, V, \pi)$

دستگاه گاز موتور Throttle

$$T = \dot{m} (V_2 - V_1)$$

سرعت ورودی V_1 سرعت خروجی V_2



تراست در ارتفاع مورد نظر به تراست استاتیکی (سرعت صفر) سطح دریا = $\frac{T}{T_{s.l}}$

$$\frac{T}{T_{s.l}} = \delta^{0.7} \quad \text{در لایه تروپوسفر}$$

$$\frac{T}{T_{s.l}} = \delta \quad \text{در لایه تروپوپوز}$$

نکته: تروپوپوز منطقه‌ای مرزی میان تروپوسفر و استراتوسفر است که مرز ثابتی نیست.

غیر از تراست، مصرف سوخت هم در موتور توربوجت دارای اهمیت است.

sfc (specific fuel consumption): مقدار سوخت مصرفی به ازای تولید یک نیوتن تراست در مدت یک

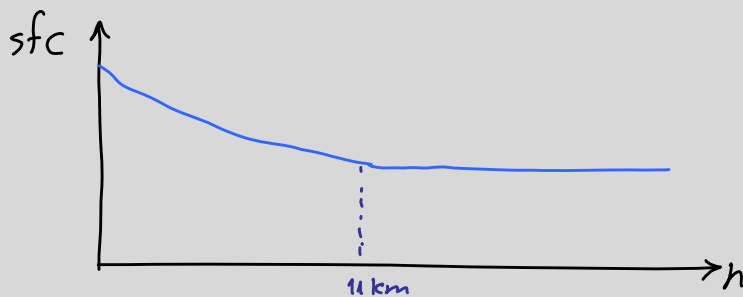
$$sfc = \left(\frac{kg}{N \cdot hr}, \frac{N}{N \cdot hr} \right) \quad \text{سامت}$$

$$sfc = sfc(h, V, \pi)$$

در یک دسته گاز ثابت، sfc با سرعت تغییر می‌کند.

$$\frac{sfc}{sfc_{s.l.}} = \delta^{0.2} \quad \text{در لایه تروپوسفر}$$

$$sfc = cte \quad \text{در لایه تروپوپوز}$$



پیستونی: توان مطرح است به جایی تراست .



توان تولید شده $P = T V$

$$P = \eta_p P_{\text{مفید}}$$

مقدار سوخت مصرفی برای تولید 1 kW توان در مدت یک ساعت $P_{sfc} = \text{Power sfc}$

$$P_{sfc} = \left(\frac{\text{kg}}{\text{kW.hr}}, \frac{\text{N}}{\text{kW.hr}} \right)$$

موتورهای پیستونی دورسته هستند:

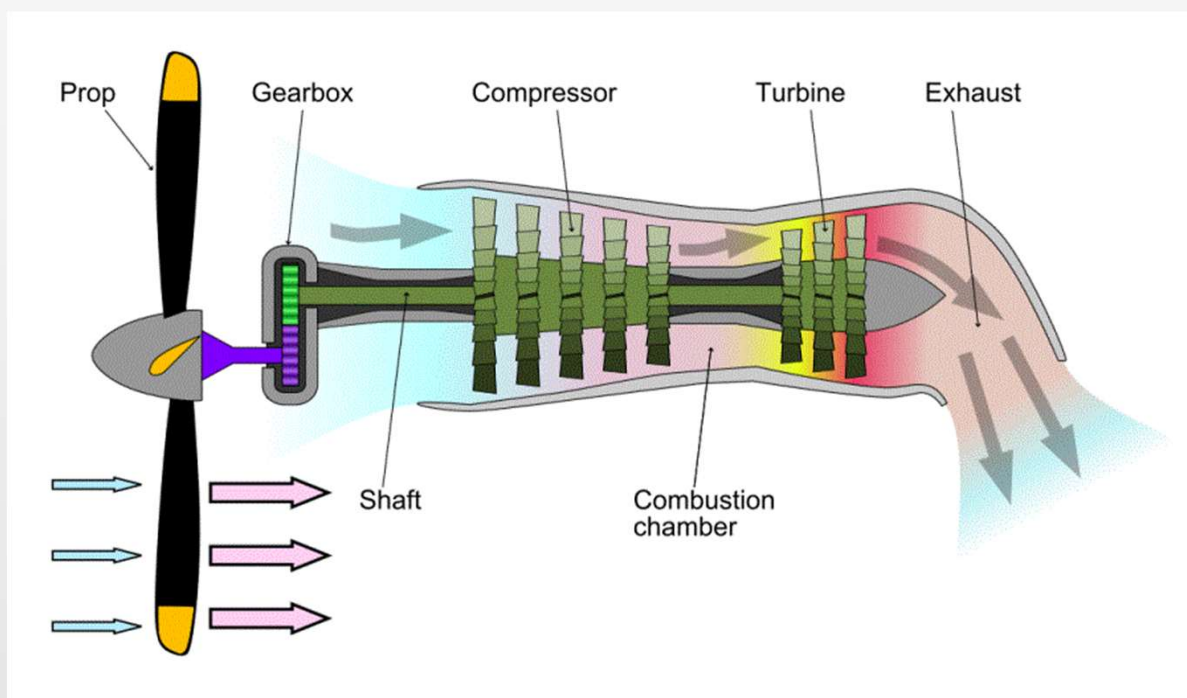
aspirated که با افزایش ارتفاع مقدار توان تولیدی کم می شود.

supercharged که بخشی از هوای فشرده خروجی را برای ورود به پیستون ها استفاده می کنند تا اثرات کاهش چگالی در ارتفاع نا محسوس تر شود تا ارتفاع خاصی این عملکرد وجود دارد که به آن ارتفاع بحرانی برای سوپرشارژر

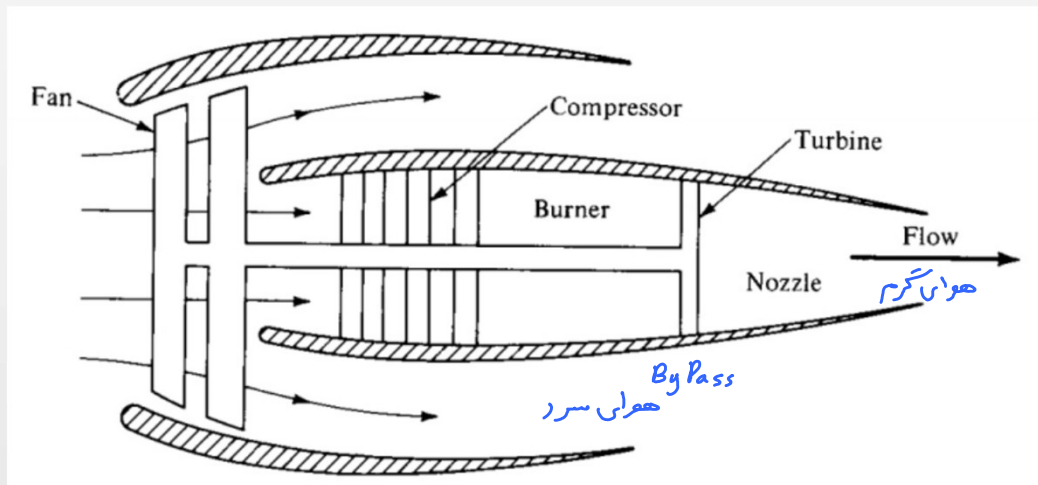
$$h^* = 6 \text{ km}$$

گویند

توربوپراپ:



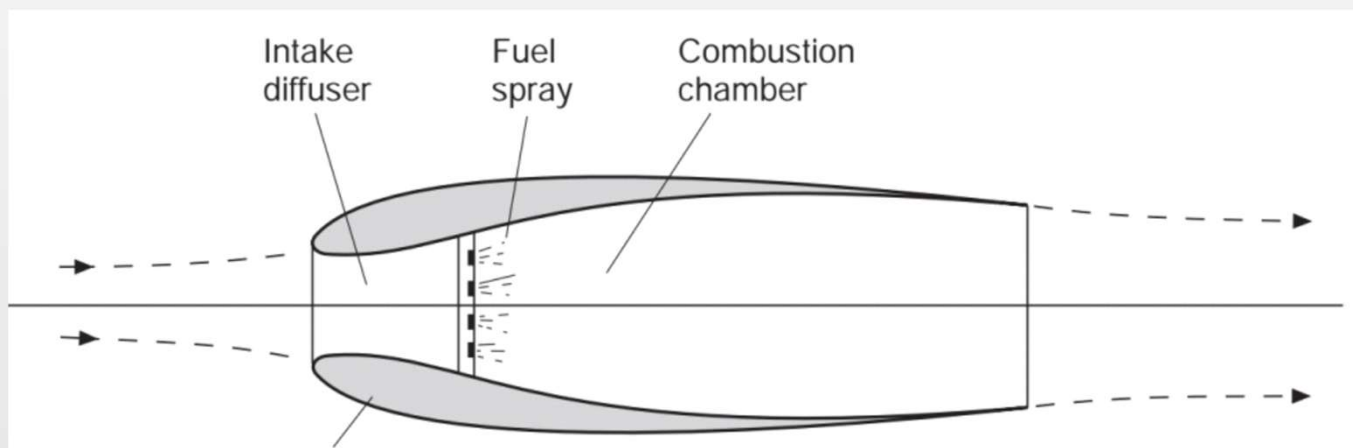
موتور توربوپراپ تلفیقی از توربوجت و پیستون است یعنی عملکردی مشابه موتور پیستونی *aspirated* دارد با افزایش ارتفاع توان کاهش می‌یابد و نیروی پیشران آن با توان تعریف می‌شود چون ملخ دار روی سکیل داخلی آن همان موتور جت است.



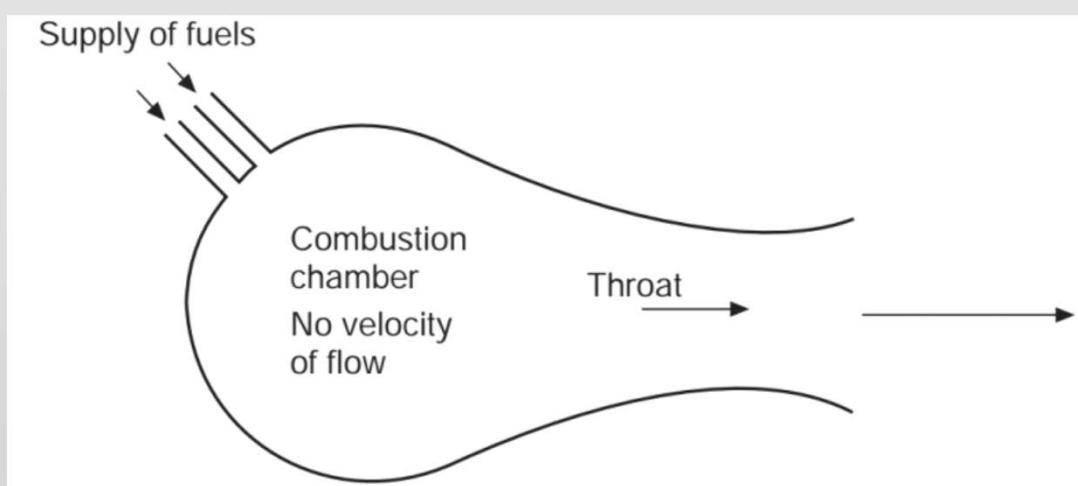
$$By\ Pass\ Ratio = \frac{\dot{m}_{سرد}}{\dot{m}_{گرم}} = 5 \sim 6$$

مسابهت زیادی با موتور توربوجت دارد و نیروی پیشران با تراست تعریف می شود و عملکرد آن هم شبیه توربوجت است. توربوفن تراست بیشتری نسبت به توربوجت دارد و مصرف سوخت بیشتری نیز دارد.

هم جت: موتور هم جت تنها یک نازل همگرا و واگرا است که فقط در آن سوخت تزریق می شود و قبل و بعد از آن توربین و کمپرسور می نایند. موتور نایدارس است.

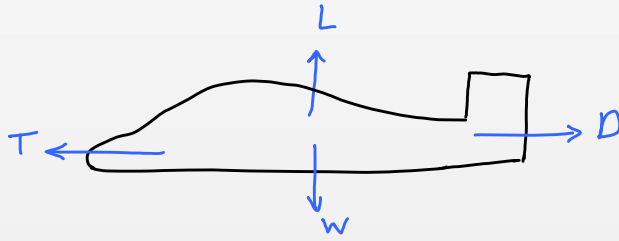


موتور راکت: نیاز به اکسیژن هوائدار، اکسیدکننده و سوخت را همراه دارد. سرعت گاز خروجی تراست تولید می کند و مصرف سوخت بالایی دارد. بیشتر در موشک ها استفاده می شود.



نوع موتور	sfc براساس تراست	تراست تولیدی T	$\frac{T}{W} \left(\frac{hp}{lb} \right)$	بیشترین محدوده عملکرد
Piston Engine	0.4-0.5	50-300 hp	0.5	$M < 0.4$
Turbo prop	0.5-0.6	6000 hp	2	$M: 0.6-0.8$
Turbo fan	0.6-0.8	60000 lb	5-6	$M: 0.85-0.95$
Turbo jet $\begin{cases} \nearrow \text{non afterburner} \\ \searrow \text{after burner} \end{cases}$	$\begin{matrix} 1 \\ 2.5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 25000 \text{ lb} \\ 50000 \text{ lb} \end{matrix} \}$	4-6	3 ای $M > 1$
Ram jet	3			5 ای $M > 3$
Rocket	10			60 ای $M > 5$

نیروهای آیرودینامیکی Lift & Drag



$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 c C_L$$

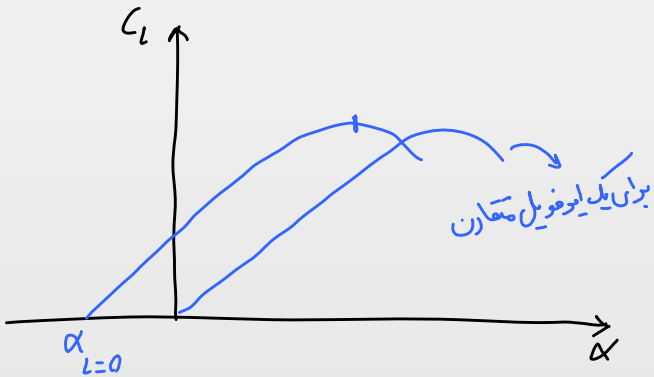
$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 c C_D$$

$$C_L = C_L(M, Re, \alpha, \Lambda)$$

$$C_D = C_D(M, Re, \alpha, \Lambda)$$

زاویه sweep
زاویه حمله
عدد رینولدز
مدرماخ

زاویه عقب گردبال



در نقطه ای (نقطه ماکزیمم نمودار) C_L کاهش پیدا می کند که این امر به علت پدیده *separation* (جدایش جریان) است.

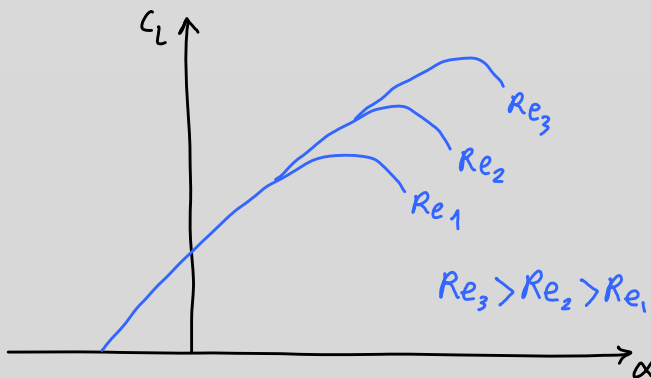
در هواپیما هر چه $C_{L_{max}}$ بیشتر باشد، ایرفویل آن هواپیما برای مانورهای برخاست و نشست مناسب تر است، چرا که با سرعت کمتری این عمل صورت می گیرد، بنابراین $C_{L_{max}}$ متناسب است با حداقل سرعت.

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 s C_L$$

↓
سطح بال

$$L = cte \Rightarrow C_L \uparrow \Rightarrow V \downarrow$$

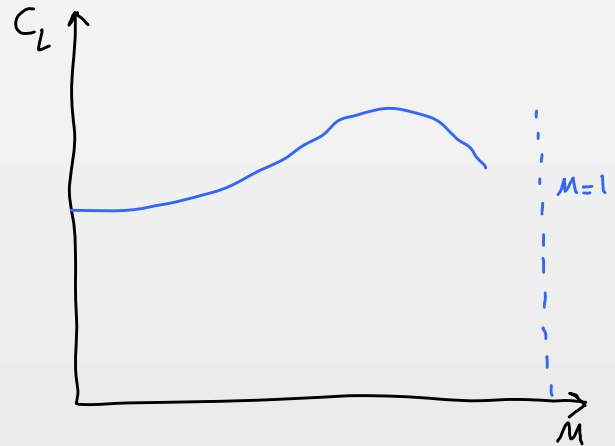
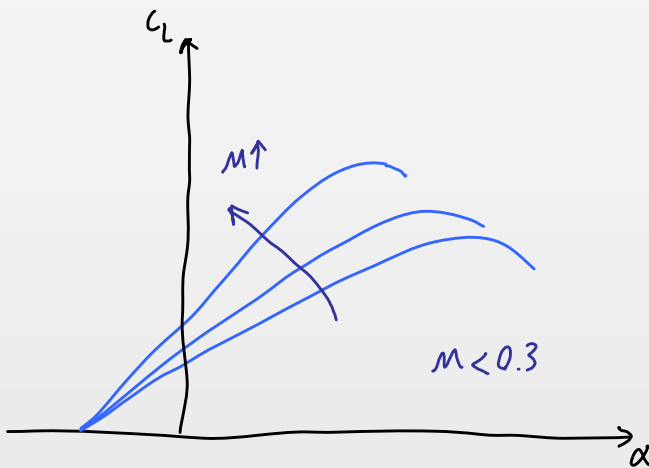
$$1- Re = \frac{\rho U L}{\mu}$$



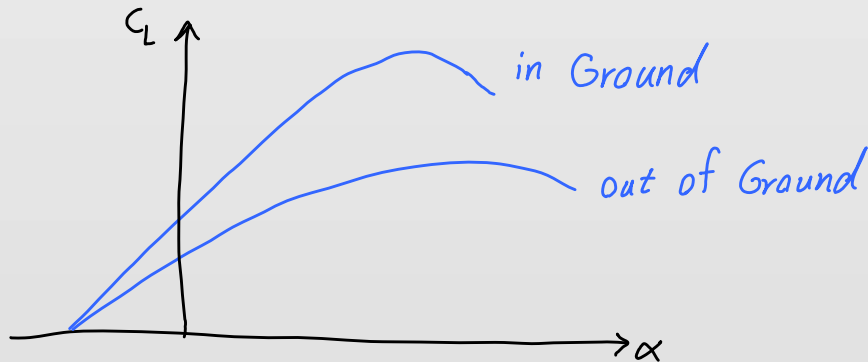
هر چه در Re بیشتر شود، C_L نیز افزایش پیدا می کند.

2- compressibility

$$C_{L_c} = \frac{C_{L_{ic}}}{\sqrt{1-M^2}}$$



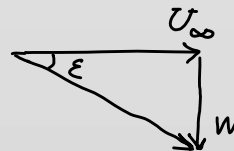
3- Ground effect



4- Down wash

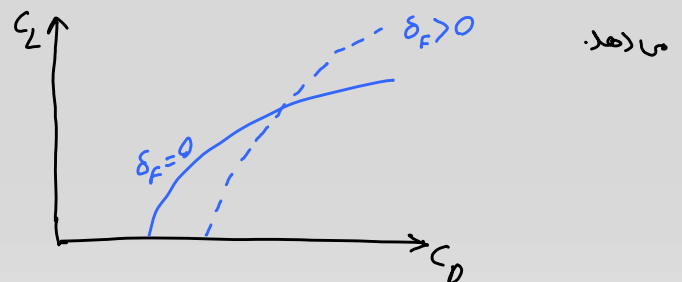
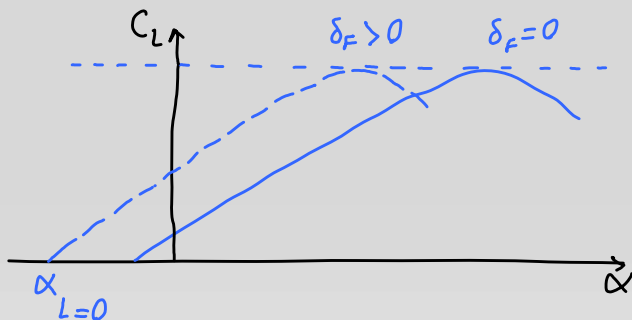
باعث کاهش C_L می شود

$$\hat{\varepsilon} = \frac{w}{U_\infty}$$

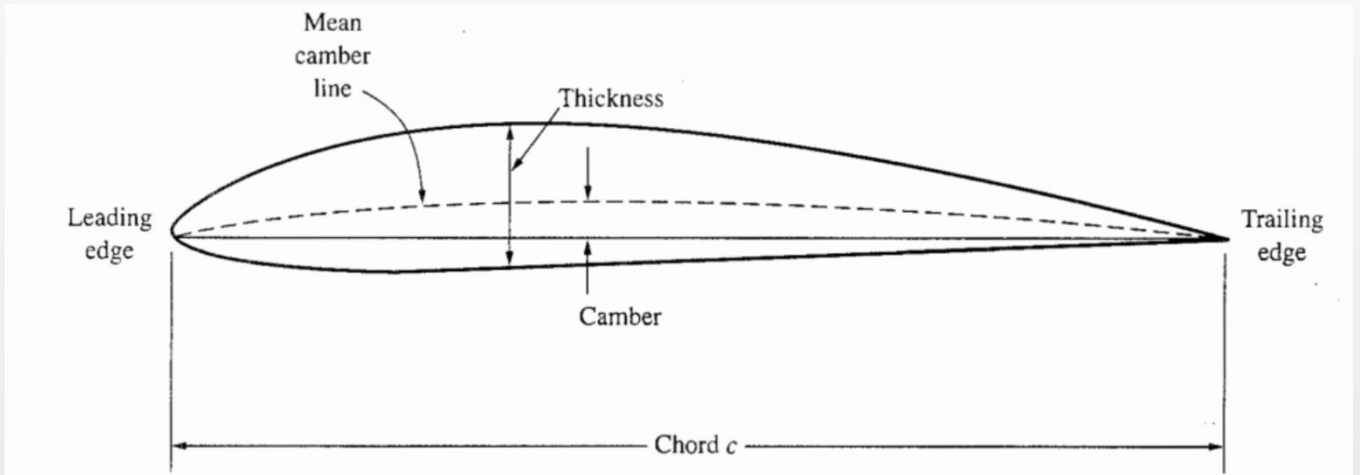


5- Flap

Flap زاویه جد stall، اکثر می کند. کار Flap عقب انداختن $\alpha_{L=0}$ در نمودار $C_L - \alpha$ است. Flap، C_D را افزایش می دهد.



- 1) 1884 phillips 
- 2) otto Lillenthal 
- 3) wright نازک و بسیار خنجره 
- 4) Göttingen Göttingen 001 → Göttingen 804
- 5) Clark clark v clark vv $\gamma, \alpha, \gamma_h, \gamma_s, Z$
- 6) NACA سری کایا سری ۱ سری هشت سری هفت سری شش پنجره سری چهارم
- 7) RAF
- 8) Eppler
- 9) gw



NACA 4

NACA 4412

Max camber in % chord → 4
 Position of max camber in $\frac{1}{10}$ of chord → 4
 Max thickness in % of chord → 12

NACA 5

NACA 23012

Max camber in % chord → 23
 Position of max chamber in $\frac{2}{100}$ of chord → 3
 Max thickness in % of chord → 12

seri 6, 7, 8, 16 or 1

تمرین

در طراحی هواپیما عموماً کسی ایرفویل را طراحی نمی‌کند بلکه ایرفویل را انتخاب می‌کند.
 مورد دیگری هم که بررسی ایرفویل دارای اهمیت است نقطه مرکز فشار است.

$$\frac{x_{cp}}{c} = \frac{x_{ac}}{c} - \frac{c_{mac}}{c_L} \quad \text{برای ایرفویل هلی متلاول}$$

هرچه c_L بیشتر شود فقط c_p (مرکز فشار) به ac (مرکز آیرودینامیک) نزدیک می‌شود.

مرکز آیرودینامیک نقطه‌ای است که گشتاور *pitching* در آن نقطه بازو به حمله تغییر نمی‌کند و ac نقطه‌ای ثابت

$$\frac{x_{ac}}{c} = - \frac{\partial c_{M_{LE}}}{\partial c_L} \quad \text{است.}$$

مرکز فشار نقطه‌ای است که برآیند گشتاور *pitching* حول آن نقطه برابر صفر و با تغییر زاویه حمله مکانش تغییر

$$\frac{x_{cp}}{c} = - \frac{c_{M_{LE}}}{c_L} \quad \text{می‌کند.}$$

نقطه c_p از نظر سازه‌ای دارای اهمیت فراوان است و بهتر است که تغییرات محلی آن کوچک باشد.

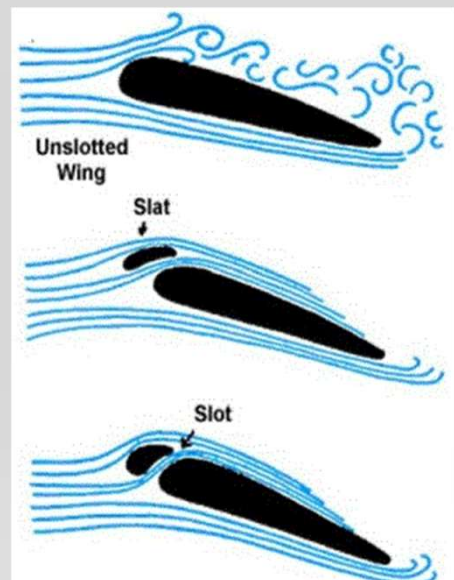
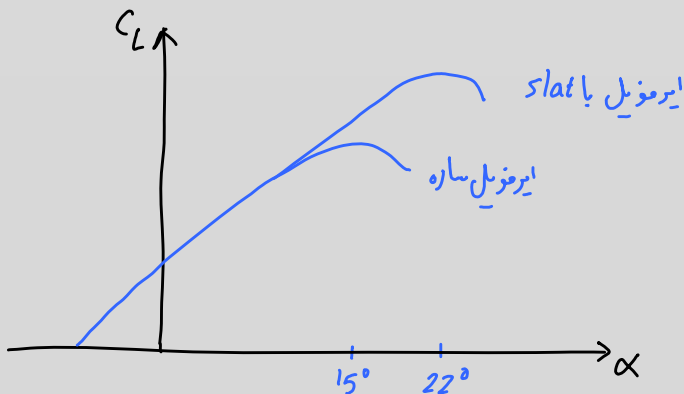
ایرفویل‌های نازک برای سرعت‌های بالا و ایرفویل‌های ضخیم برای سرعت‌های کم به کار می‌روند.

اگر به ضرایب $lift$ بیشتری نیاز داشته باشیم یا اگر بخواهیم در زاویه حمله کمتر به $lift$ مورد نظر برسیم می‌توانیم

از وسایل جانبی *slat* و *Flap* استفاده کنیم. کاربرد *Flap* در *trailing edge* و کاربرد *slat* در *leading edge*.

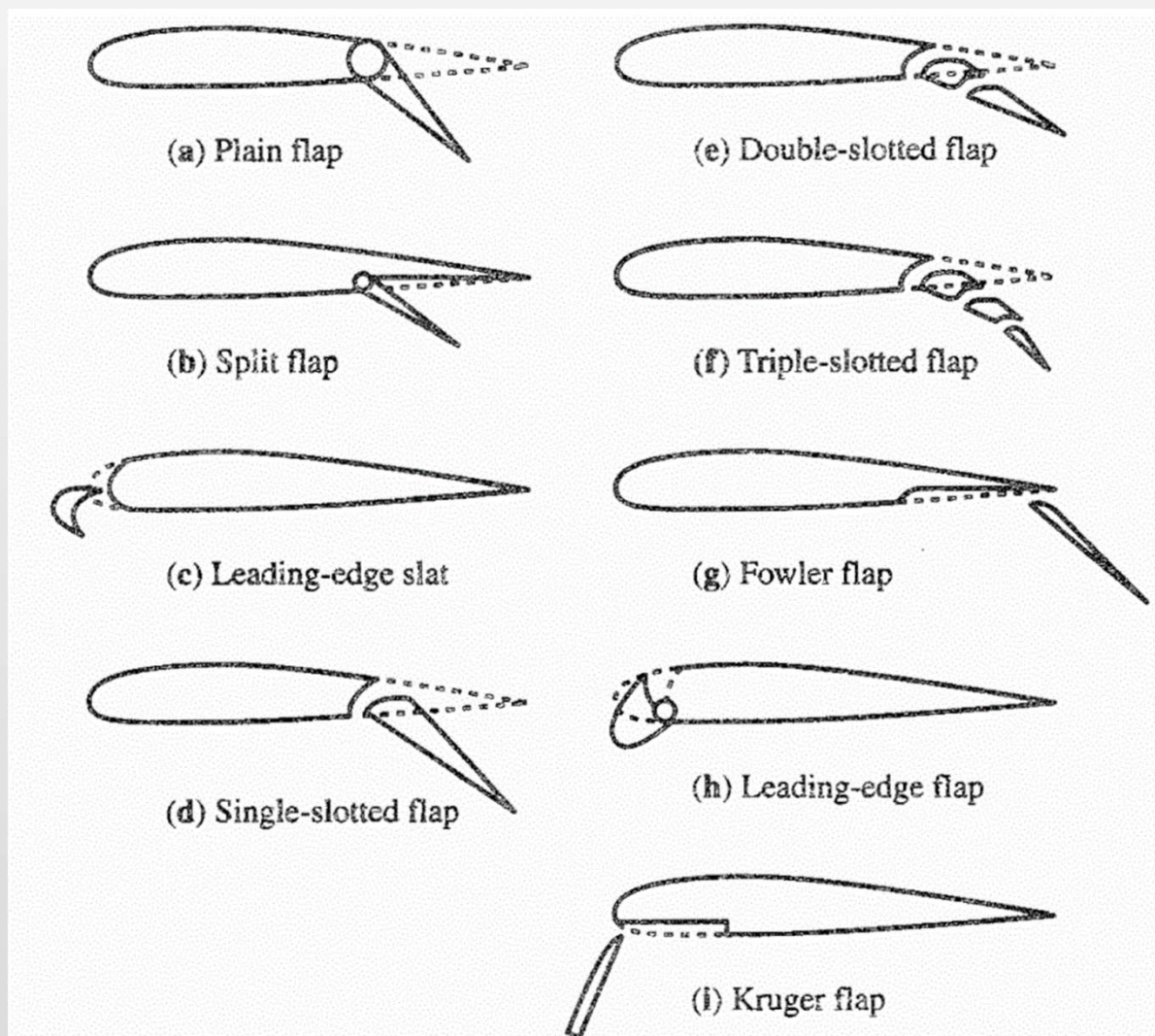
به وسیله *slat* می‌توان *Boundary layer* را کنترل نمود تا جایی که از پشت *slope* (شکاف) عبور می‌کند باعث

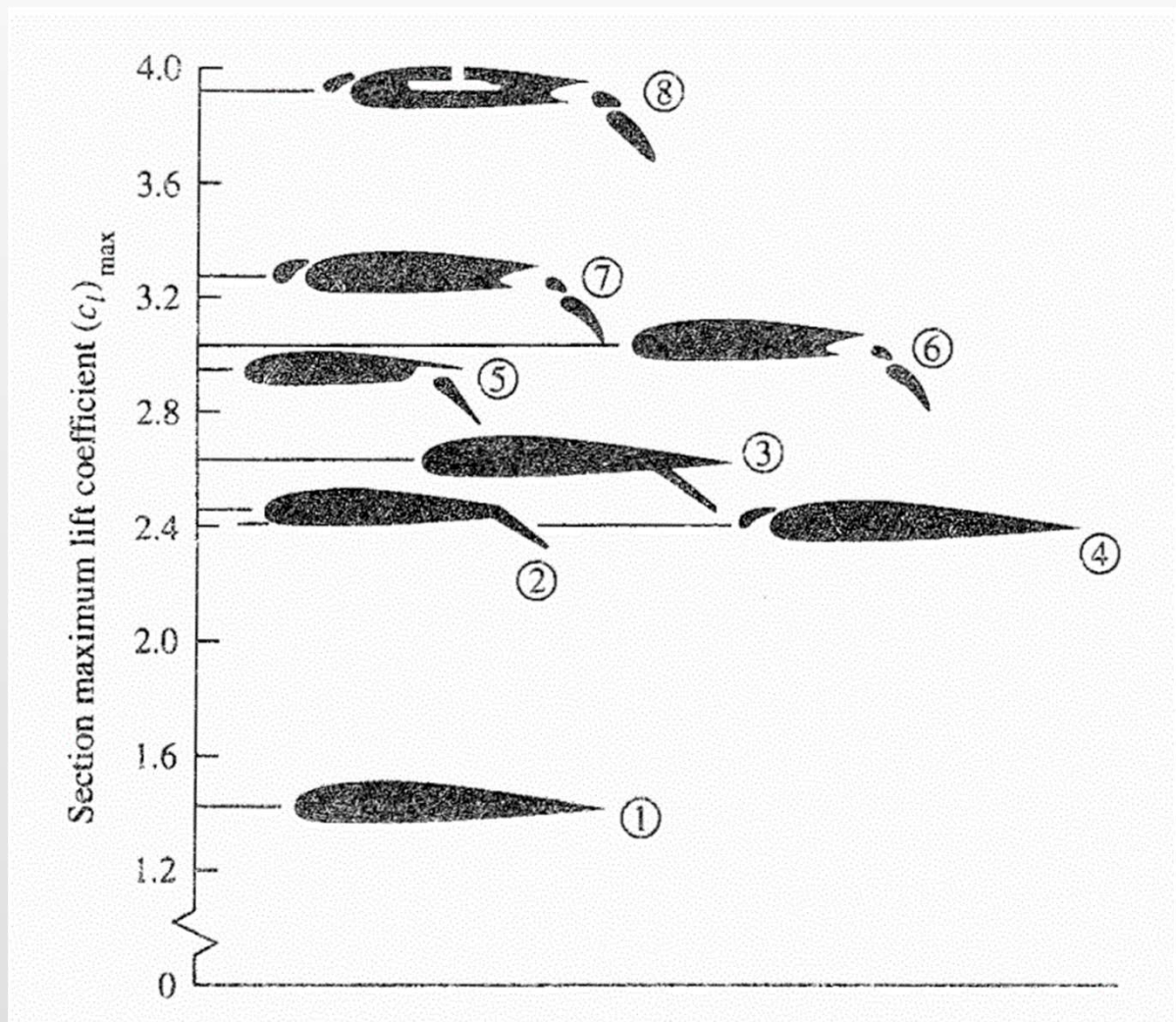
می‌شود تا جریان به ایرفویل بچسبد. اثر *slat* در زاویه حمله بالا ایجاد می‌گردد.



معرفی *flap* ها: *Flap* ها باعث افزایش *camber* شده که *Lift* را نیز افزایش می دهند. انواع مختلفی *flap* ها

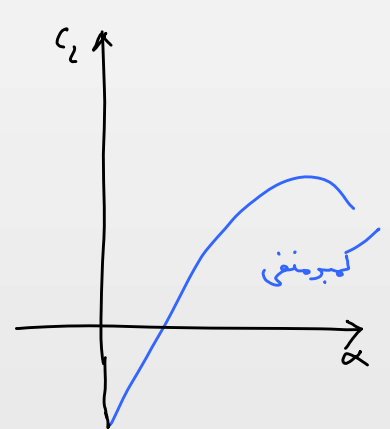
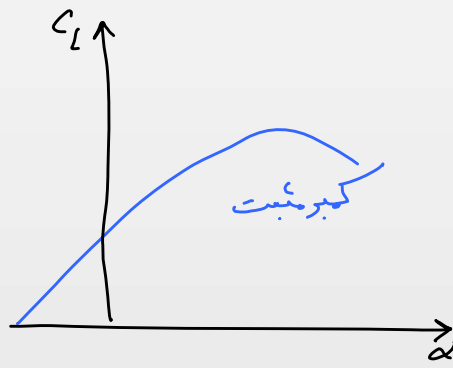
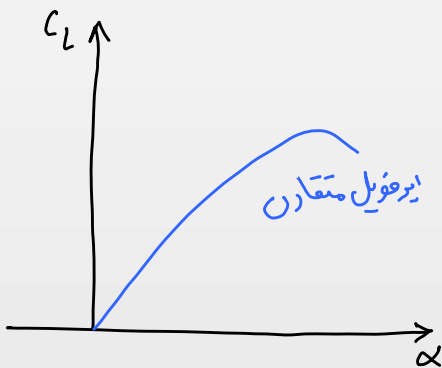
داریم:





Drag polar

برخلاف lift میزان Drag هیچگاه صفر نمی شود و حداقل پس از زمانی که $C_L = 0$.



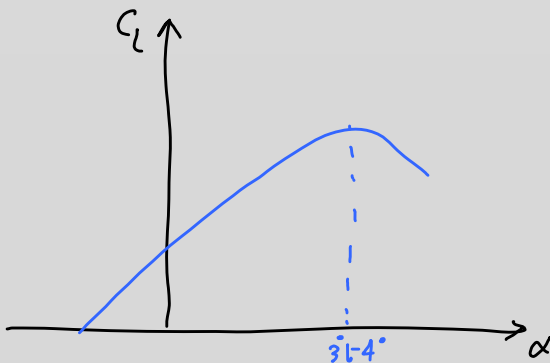
در هواپیما همان طور که قبلاً اشاره شد هر چه C_{Lmax} بیشتر باشد ایرفویل برای عملکردهای نشست و برخاست مناسب تر است. مورد دیگری که اهمیت دارد C_{Dmin} است که هر چه قدر کمتر باشد می توان به سرعت بالاتری با یک تراست ثابت رسید.

این دو عامل C_L و C_{Dmin} در زوایای حمله متفاوتی وجود دارند.

برای اینکه یک هواپیما کارایی مناسبی داشته باشد باید دارای پارامترهای مهم بهینه ای $\frac{L}{D}$ و $\frac{C_L}{C_D}$ باشد.

$$E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$$

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{max} \neq \frac{C_{Lmax}}{C_{Dmax}}$$



اغلب پروازها در حدود زوایای حمله 3° یا 4° صورت می گیرد. به عبارت دیگر $\frac{C_{Lmax}}{C_{Dmax}}$ بیانگر محدوده سرعت است در حالی که $\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{max}$ بیانگر عملکرد خوب و اقتصادی بودن پرواز هواپیما است.

- (I) $C_{L_{max}}$ سرعت حادّی $W = L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_{L_{max}}$
- (II) $C_{D_{max}}$ سرعت حادّی $T = D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_{D_{max}}$
- (III) $\frac{C_{L_{max}}}{C_{D_{max}}}$ محدوده سرعت پروازی هرچه در بیشتر باشد محدوده پروازی بزرگتر است
- (IV) $E = \frac{C_L}{C_D}$ کیفیت عملکردی و آیرودینامیکی هرچه بیشتر باشد برد پروازی بیشتر است
- $C_D (M, Re, \alpha, \Lambda)$

Total Drag Coefficient

zero lift drag

$$C_D = C_{D_0} + k C_L^2$$

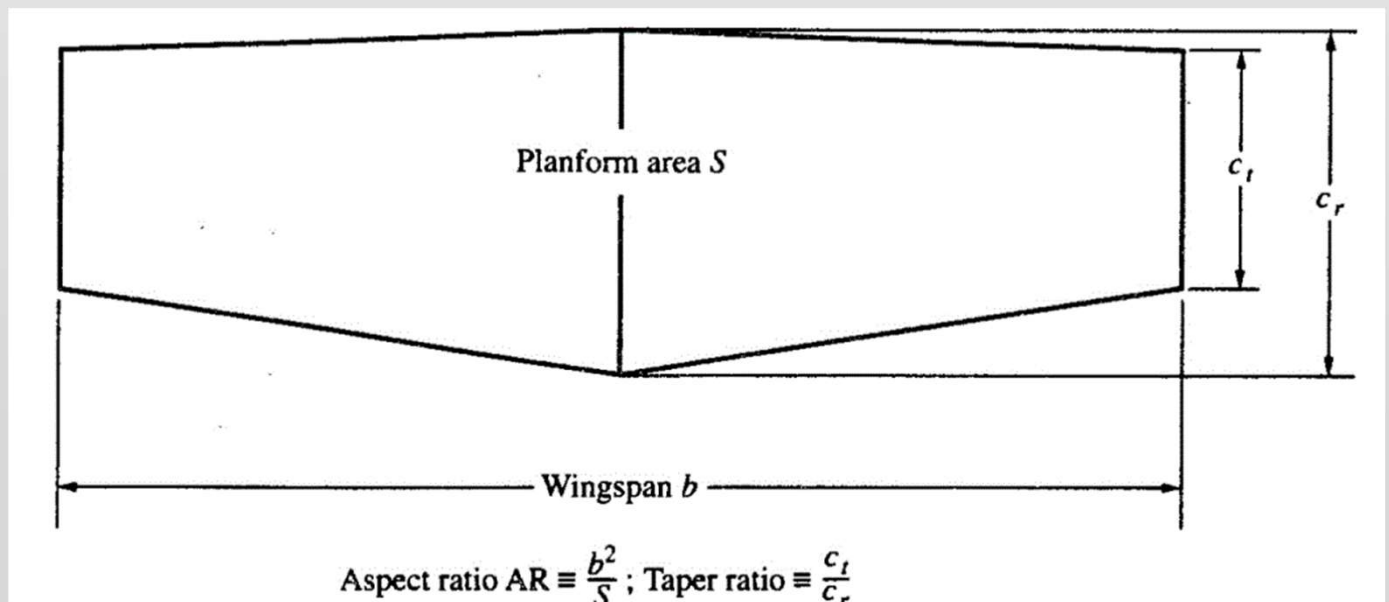
$$k = \frac{1}{\pi AR e}$$

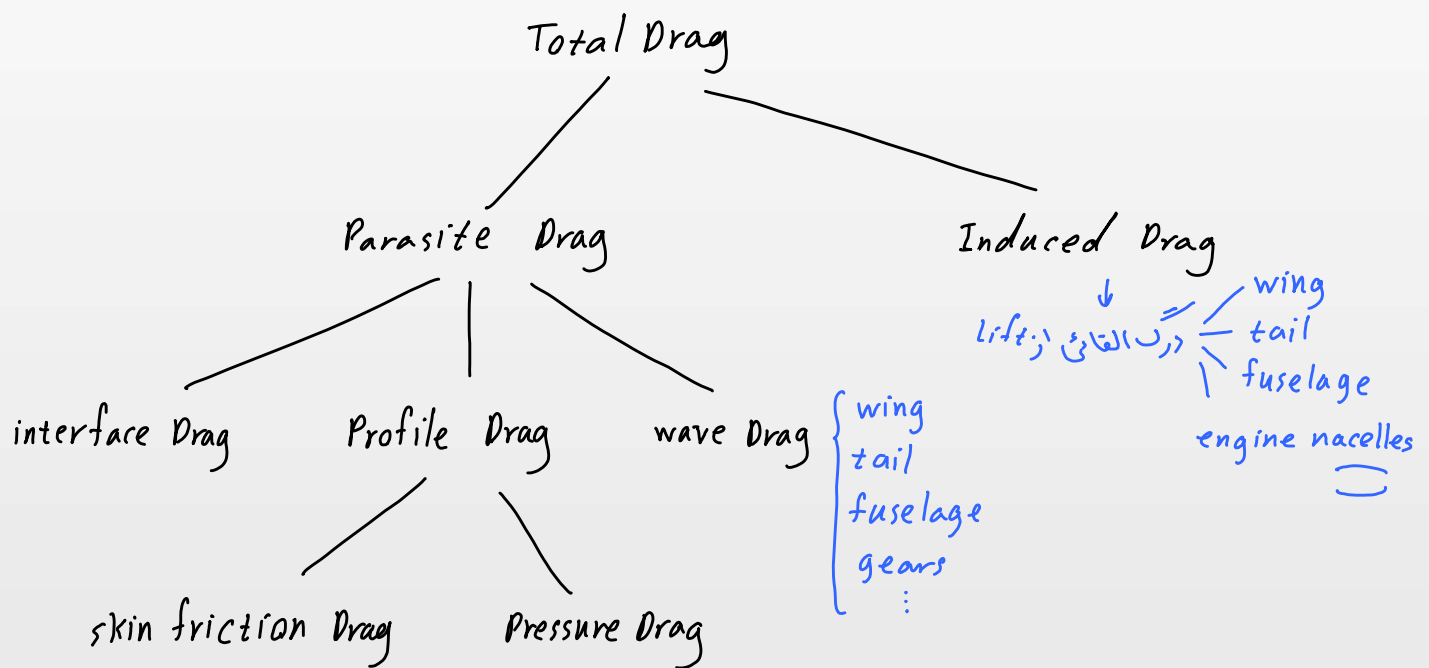
$$AR = \frac{b^2}{S}$$

oswald efficiency factor

$$C_D = C_{D_0} + \frac{1}{\pi AR e} C_L^2$$

Drag Polar





$$C_D = C_{D_{\text{Parasite Drag}}} + C_{D_{\text{Induced Drag}}}$$

در قسمت Induced Drag پارامتر k وجود دارد که تابعی است از نسبت منطری $Aspect Ratio$ و ضریب دیگری که بنام $Oswald$ که این ضریب نشانگر تغییرات ضریب برای دهانه بال $(span)$ است و برای هر هواپیمایی مقدار ثابتی دارد بین 0.6 تا 0.9 تغییر می کند و در بال بیضوی $e=1$ است و برای بالهای $sweepback$ بیش از 30°

$$e = 4.61 \times (1 - 0.045 AR^{0.68}) [\cos(\Lambda_{LE})]^{0.15} - 3.1 \quad \text{از } 30^\circ$$

$$e = 1.78 \times (1 - 0.045 AR^{0.68}) - 0.64 \quad \text{و برای بالهای مستطیلی}$$

مقدار e در زوایای حمله بالا (سرعت های کم) تا 30% کاهش می یابد.

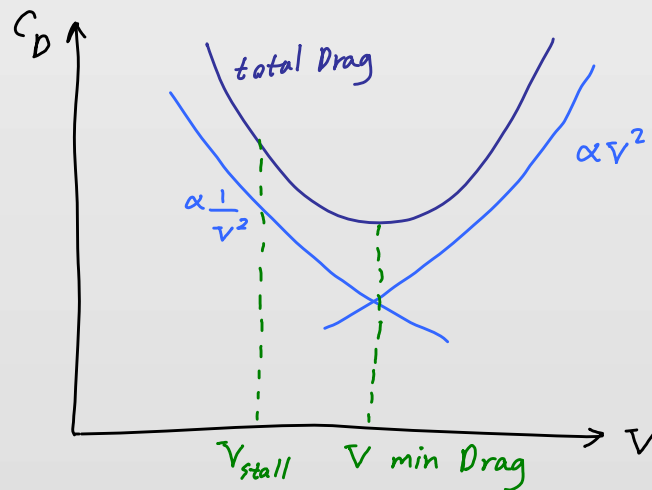
$$D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D$$

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \rho S V^2 (C_{D_0} + k C_L^2) \\ C_L &= \frac{L = W}{\frac{1}{2} \rho S V^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D = \underbrace{\frac{1}{2} \rho S C_{D_0}}_A V^2 + \underbrace{\frac{k W^2}{\frac{1}{2} \rho S}}_B V^2$$

$$D = A V^2 + \frac{B}{V^2}$$

همان طور که مشاهده می شود معادله از دو قسمت تشکیل شده است که یکی با V^2 متناسب است و دیگری با $\frac{1}{V^2}$

متناسب است.



V_{stall} : حداقل سرعتی که می‌توان با آن سرعت هواپیما را در یک ارتفاع ثابت نگه داشت.

$$V_{stall} = \sqrt{\frac{L=W}{\frac{1}{2} \rho S C_{L_{max}}}}$$

نقطه $min Drag$:

$$D = D \frac{W}{L} = W \frac{D}{L} = W \frac{C_D}{C_L}$$

D زمانی مینیمم است که $\frac{C_D}{C_L}$ مینیمم باشد یا $\frac{C_L}{C_D}$ ماکزیمم.

$$\frac{d\left(\frac{C_D}{C_L}\right)}{dC_L} = 0 \rightarrow \frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_{D_0} + k C_L^2}{C_L} \right) = 0 \rightarrow k C_{L_{min Drag}}^2 = C_{D_0}$$

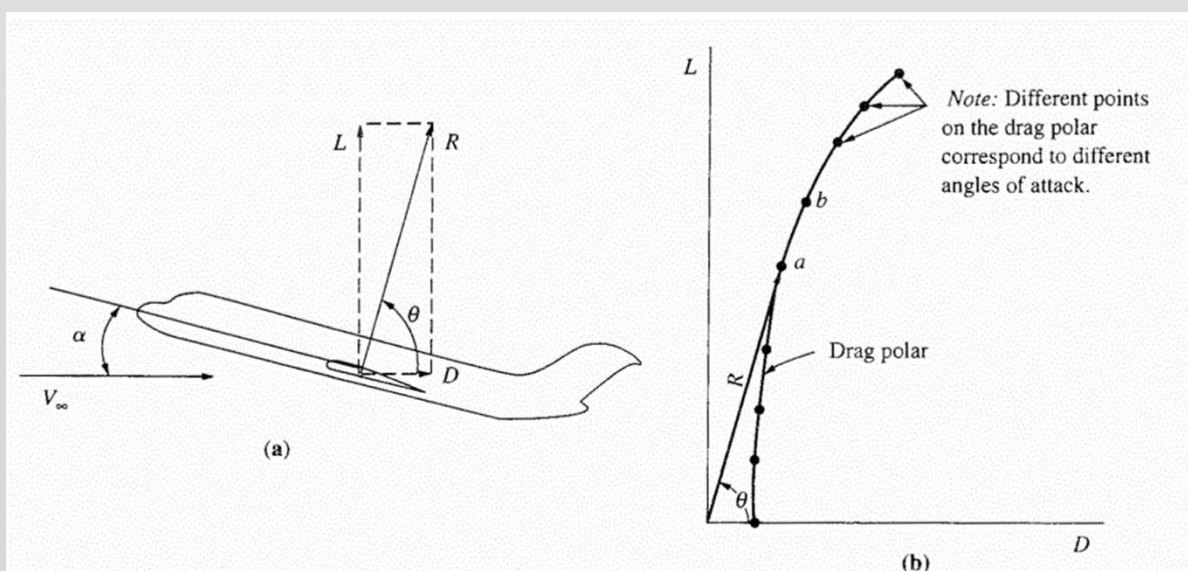
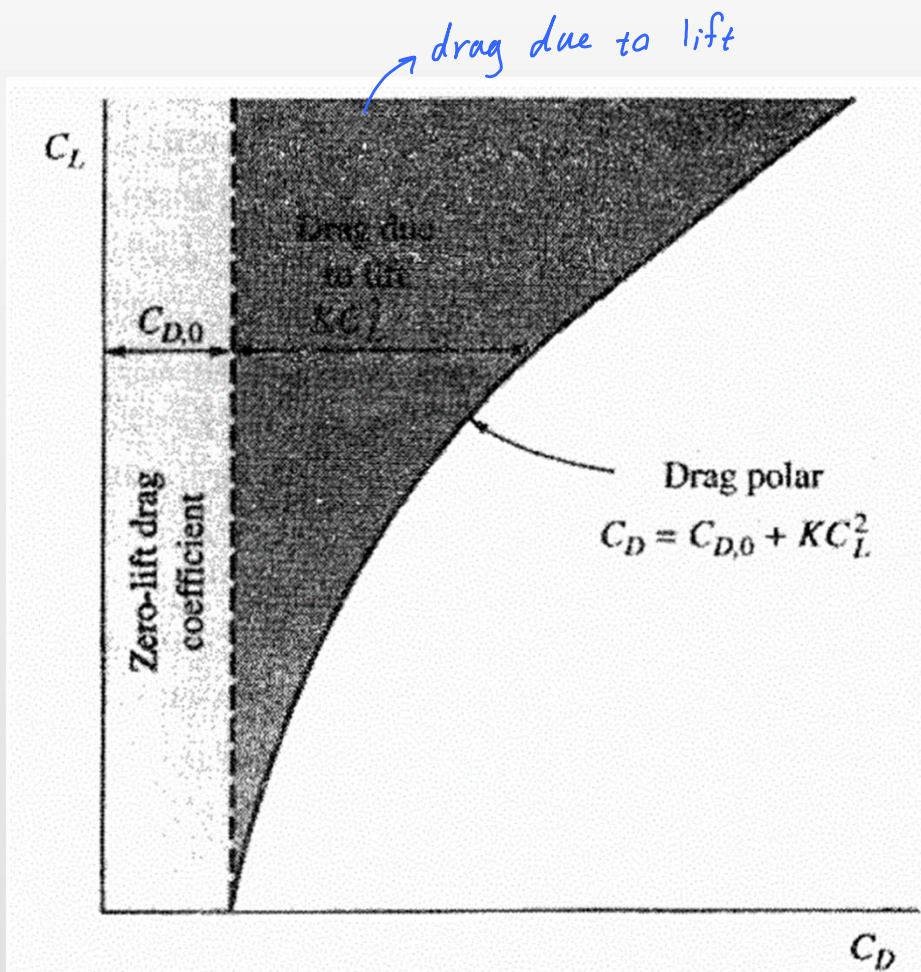
حنگامی که در شرایط $min Drag$ هستیم: $Parasite Drag = Induced Drag$ بنابراین

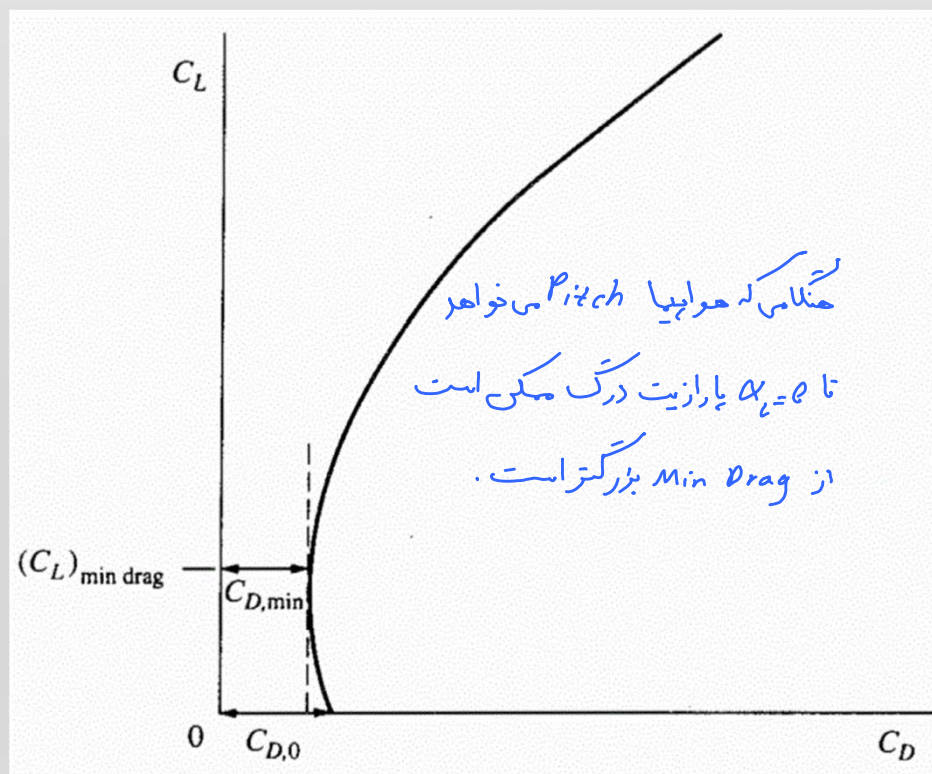
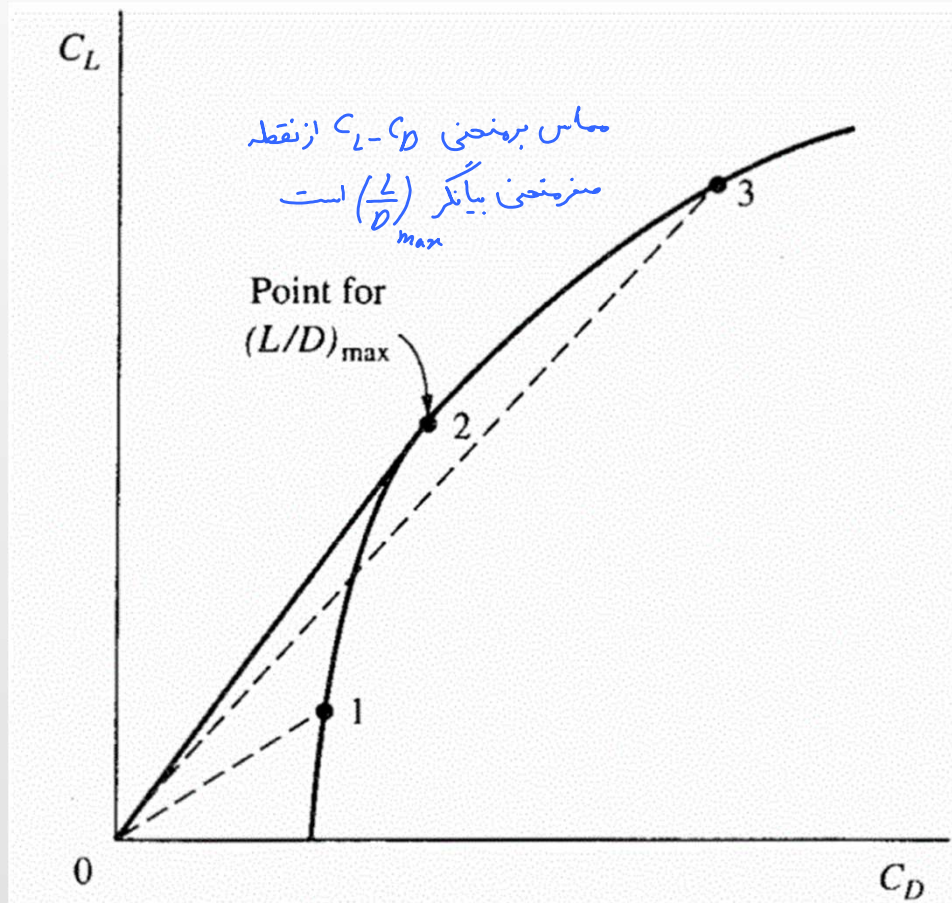
$$C_{D_{min}} = 2 C_{D_0} = 2 K C_{L_{min}}^2$$

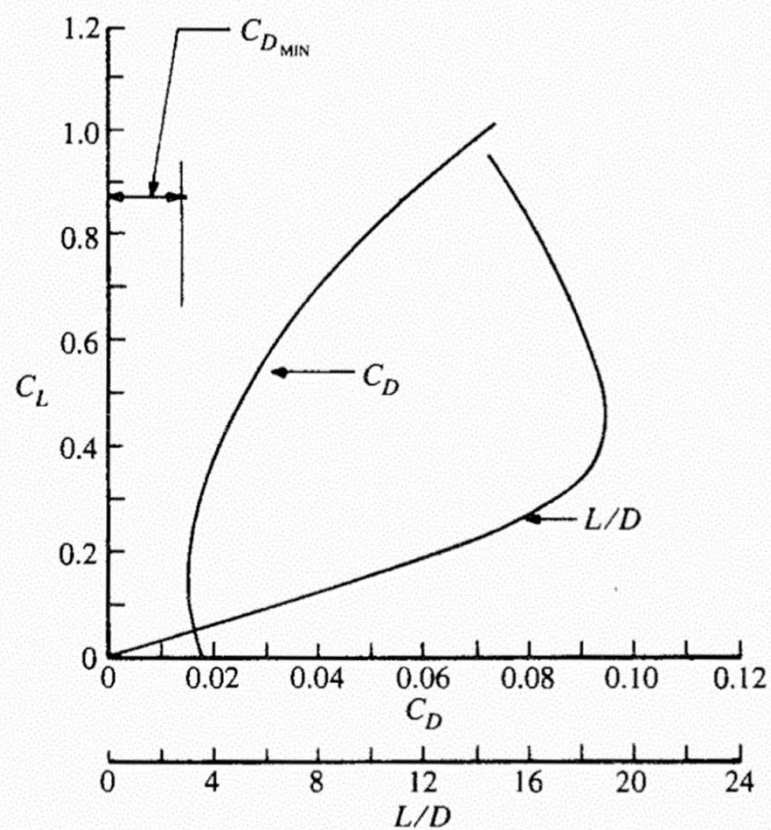
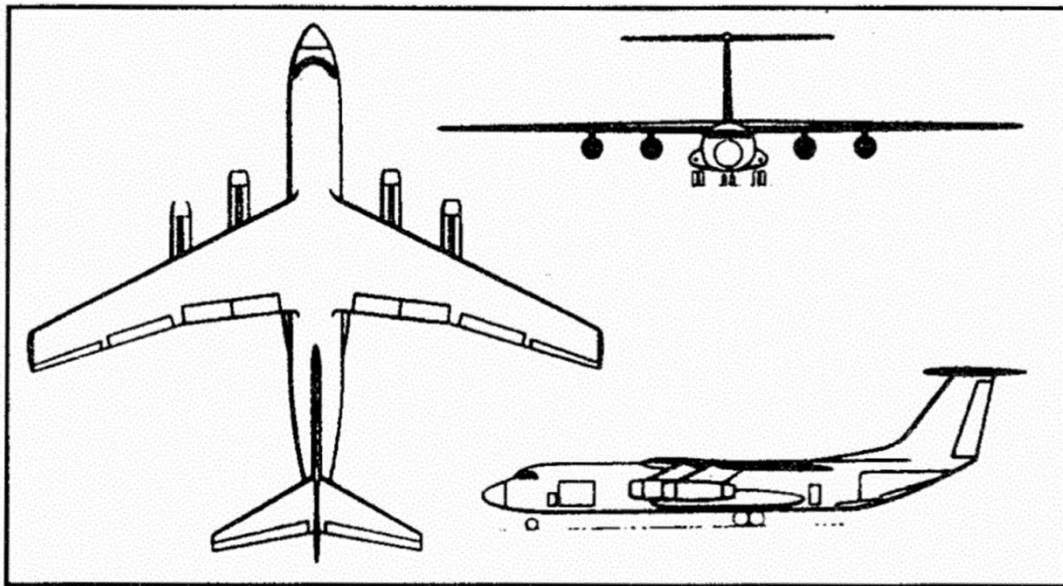
$min Drag$:

$$\left. \begin{aligned} V_{min} &= \sqrt{\frac{W}{\frac{1}{2} \rho S C_{L_{min}}}} \\ C_{L_{min}} &= \sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{min} = \left(\frac{W}{\frac{1}{2} \rho S} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{K}{C_{D_0}} \right)^{\frac{1}{4}}$$

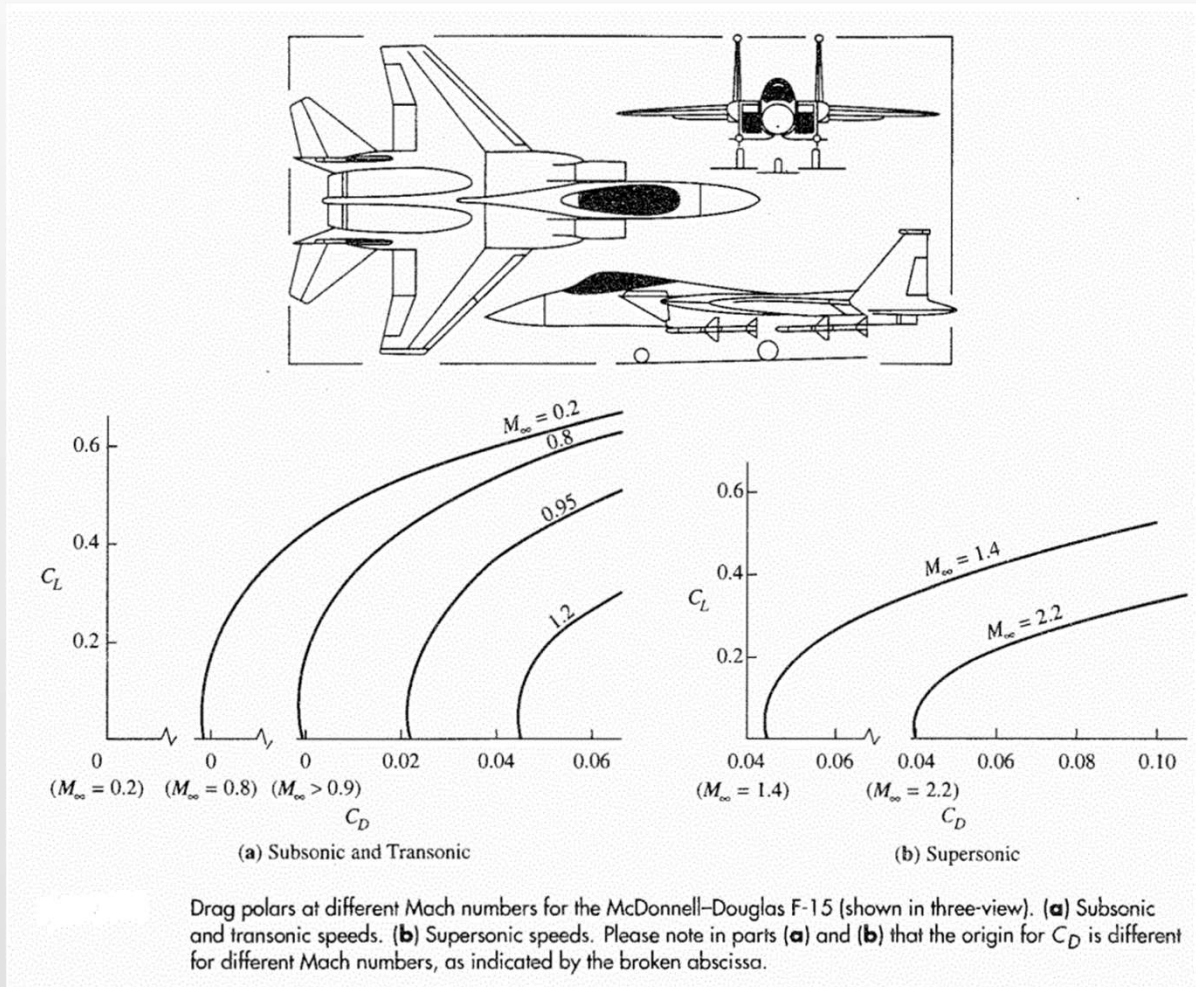
$$\left(\frac{C_L}{C_D} \right)_{max} = \frac{C_{L_{min}}}{C_{D_{min}}} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}} \times \frac{1}{2 C_{D_0}} = \frac{1}{2 \sqrt{K C_{D_0}}}$$







Low-speed drag polar and L/D variation for the Lockheed C-141A (shown in three-view).



مثال: هواپیمایی دارای وزن 240000 N و سطح بال 80 m^2 می باشد، اگر سرعت man هواپیمایی در سطح دریا

برابر $120 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد و ضریب برای ماکزیمم بدون فلپ برابر 1.5 و با فلپ برابر 2.2 می باشد. مطلوب است:

الف) رسم منحنی تغییرات C_L در سطح دریا بر حسب سرعت.

ب) پایین ترین تراز چه سرعت حقیقی با پر از flap استفاده کرد. در دو حالت سطح دریا و ارتفاع 6100 m ($\delta=0.533$) هواپیمایی بکینواخت و مستقیم الخط است.

حرکت بکینواخت است و مستقیم الخط بنابراین lift با وزن برابر است.

$$W = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L$$

$$\rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

برای سطح دریا داریم:

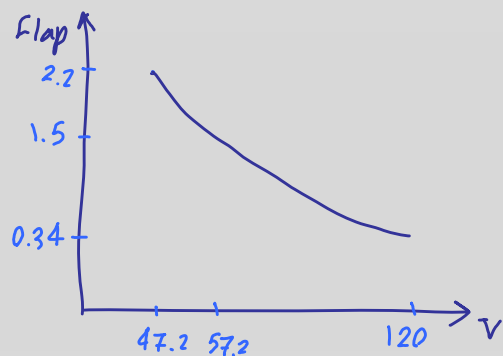
$$C_L = \frac{2 \times 240000}{1.225 \times 80 \times V^2} = \frac{4898}{V^2}$$

برای رسم محدوده سرعت نیاز است که سرعت ماکزیمم را در مسئله داده شود و سرعت min را هم می توان از $C_{L_{\text{man flap}}}$ بدست آورد.

$$C_{L_{\text{man flap}}} \frac{4898}{V_{S_{\text{flap}}}^2} \rightarrow V_{S_{\text{flap}}} = \sqrt{\frac{4898}{2.2}} = 47.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$C_L \text{ بدون فلپ} = \frac{4898}{V_s^2} \rightarrow V_s = \sqrt{\frac{4898}{1.5}} = 57.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$C_{L_{\text{min}}} = \frac{4898}{V_{\text{man}}^2} = \frac{4898}{120^2} = 0.34$$



برای ارتفاع 6100m

$$\delta = 0.533$$

$$V_{S_{EAS}} = V_S \sqrt{\delta} \rightarrow V_S = \frac{V_{S_{EAS}}}{\sqrt{\delta}}$$

$$V_{S_{Flap}} = \frac{47.2}{\sqrt{0.533}} = 64.65$$

$$V_{S_{بدون\ فلپ}} = \frac{57.2}{\sqrt{0.533}} = 78.35$$

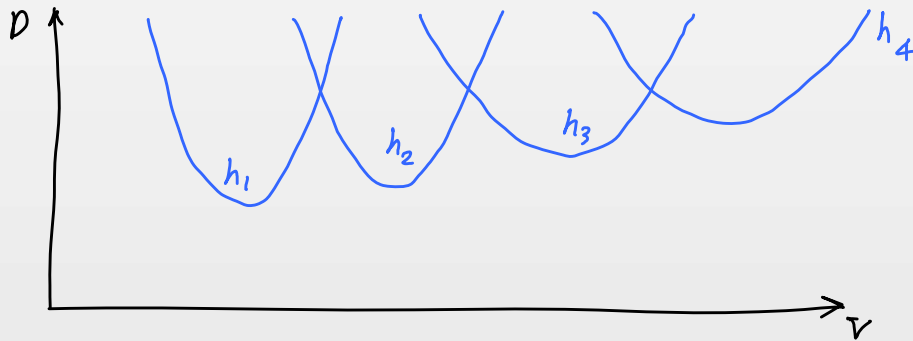
نم: هواپیمایی با ضریب منطری $AR=6$ و راندمان $e=0.8$ و ضرایب $\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{max}=9.7$ در حال پرواز است. درگ پلار این هواپیما را بدست آورید.

$$k = \frac{1}{\pi AR e} = \frac{1}{\pi \times 6 \times 0.8} = 0.0663$$

$$\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{max} = \frac{1}{2\sqrt{k C_{D_0}}} \Rightarrow 9.7 = \frac{1}{2\sqrt{0.0663 C_{D_0}}} \rightarrow C_{D_0} = 0.04$$

$$C_D = 0.04 + 0.0663 C_L^2$$

اگر خواستیم هواچیا درست بالاتری پرواز کند باید بتوانیم C_D را کاهش دهیم تا D زیاد نشود و D_{min} معادل V_{max} (سرعت) شود.



با افزایش ارتفاع نمودار به سمت راست شیف می‌کند و V_{mp} بزرگتر می‌شود و نمودار درگ تحت‌تر می‌شود. $h_4 > h_3 > h_2 > h_1$

یک پرواز یکنواخت را در دو حالت در نظر می‌گیریم و دو حالت را در آن بررسی می‌کنیم. یکی پرواز حالت $\min Drag$ و دیگری در حالت کلی

$$V = m V_{mp}$$

$$W = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \rightarrow \frac{1}{2} \rho S V_{mp}^2 C_{L_{mp}} = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L$$

$$\rightarrow V_{mp}^2 C_{L_{mp}} = (m V_{mp})^2 C_L \rightarrow C_L = \frac{C_{L_{mp}}}{m^2}$$

$$C_D = C_{D_0} + K C_L^2 = C_{D_0} + K \left(\frac{C_{L_{mp}}}{m^2} \right)^2 = C_{D_0} + \frac{1}{m^4} K C_{L_{mp}}^2$$

$$K C_{L_{min\ drag}}^2 = C_{D_0} \quad \text{از قبل می‌دانیم} \rightarrow C_D = C_{D_0} \left(1 + \frac{1}{m^4} \right)$$

$$\frac{C_L}{C_D} = \frac{\frac{C_{L_{mp}}}{m^2}}{C_{D_0} \left(1 + \frac{1}{m^4} \right)} = \frac{2 m^2}{m^4 + 1} \left(\frac{C_{L_{mp}}}{2 C_{D_0}} \right) \rightarrow \left(\frac{C_L}{C_D} \right)_{max}$$

$$\frac{\frac{C_L}{C_D}}{\left(\frac{C_L}{C_D} \right)_{max}} = \frac{2 m^2}{1 + m^4}$$

$$\frac{D}{D_{min}} = \frac{\frac{1}{2} \rho S V^2 C_D}{\frac{1}{2} \rho S V_{min}^2 C_{D_{min}}} = \frac{m^2 C_{D_0} (1 + \frac{1}{m^2})}{2 C_{D_0}} = \frac{1}{2} (m^2 + \frac{1}{m^2})$$

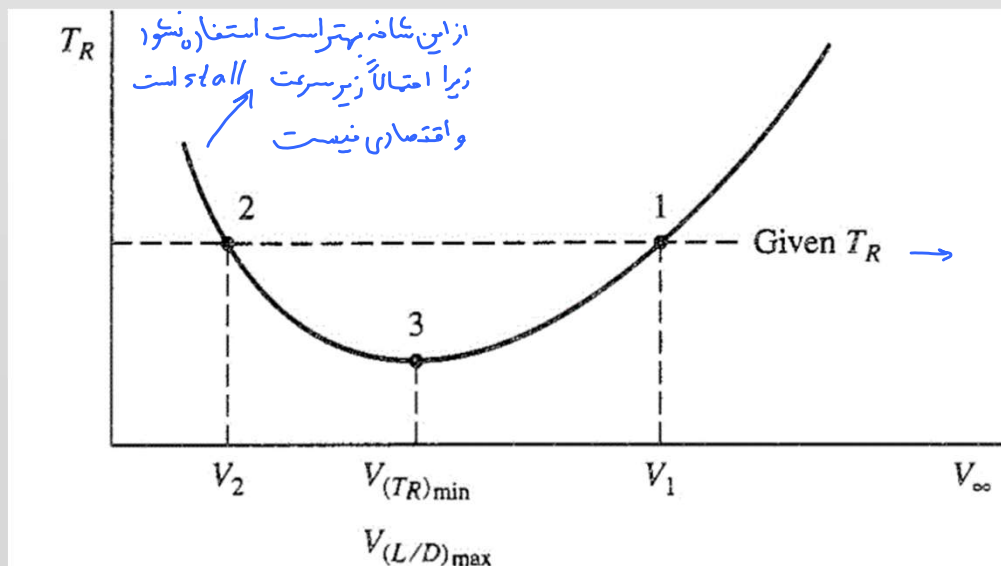
$$T = D, \quad L = W$$

$$C_L = \frac{2L}{\rho V^2 S} = \frac{2W}{\rho V^2 S}$$

$$C_D = C_{D_0} + k C_L^2 = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A R e} = C_{D_0} + \frac{4W^2}{\rho^2 V^4 S^2 \pi A R e}$$

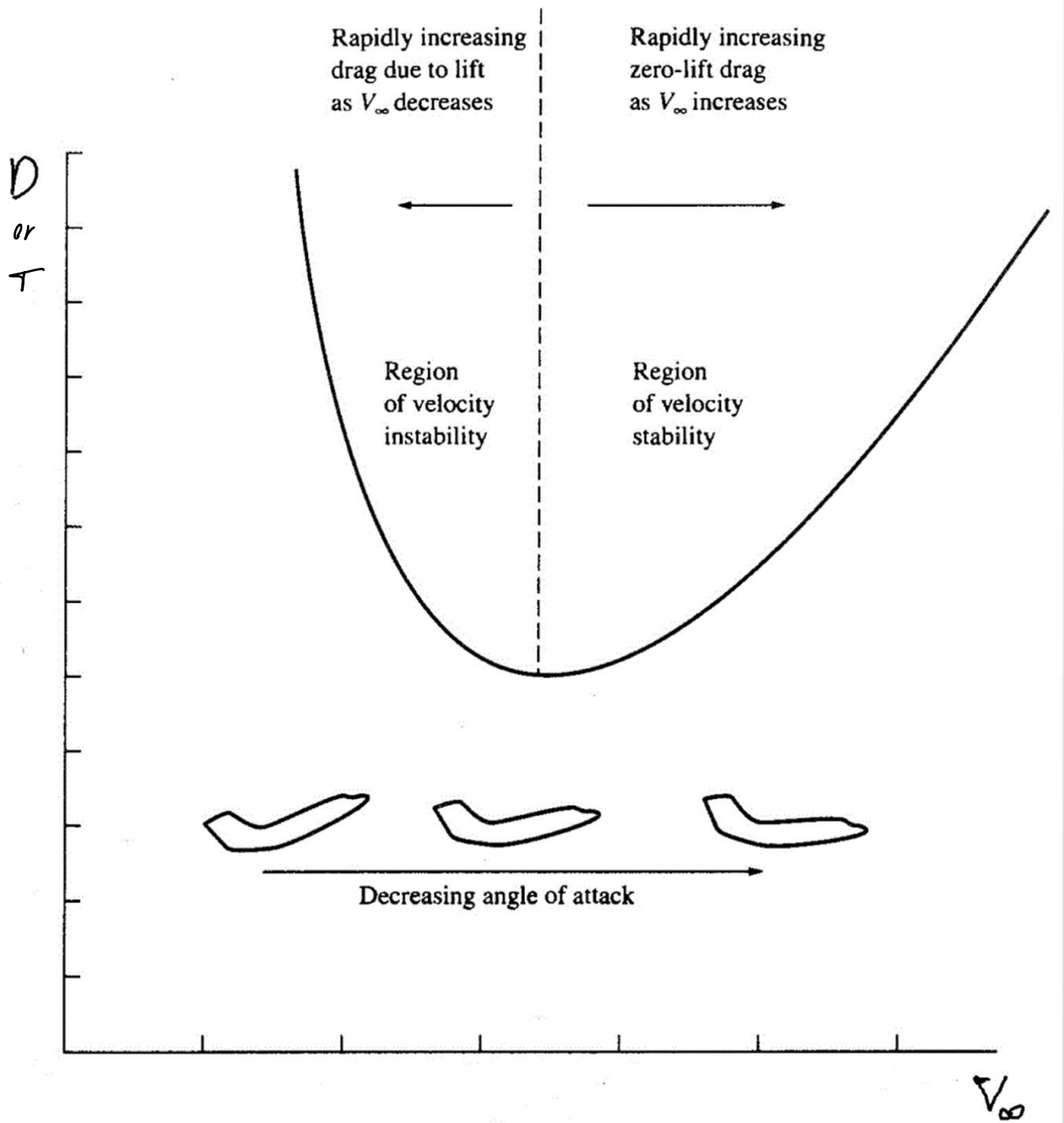
$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D_0} + \frac{2W^2}{\rho V^2 S \pi A R e}$$

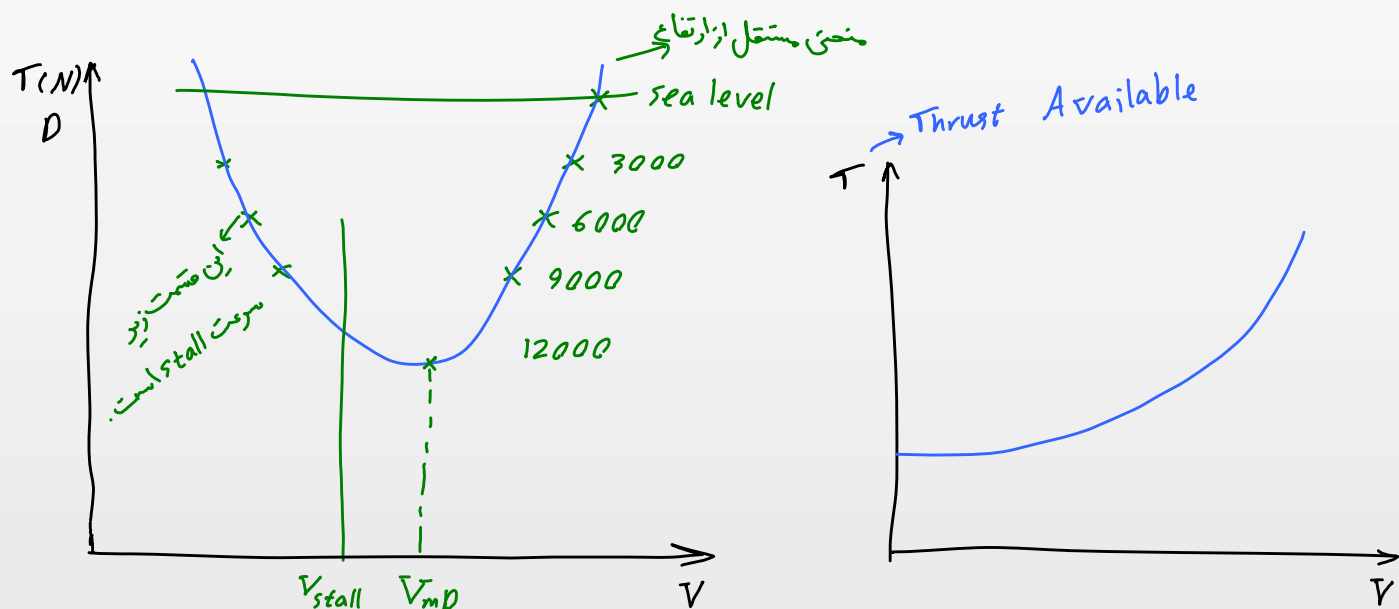
$$\text{Thrust Required} = D$$



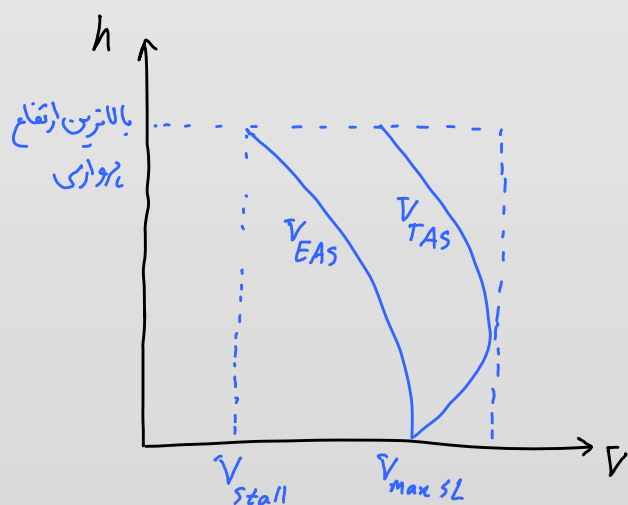
پرواز یکپوخت

At a given T_R larger than the minimum value, there are two corresponding velocities, the low velocity V_2 and the high velocity V_1 .



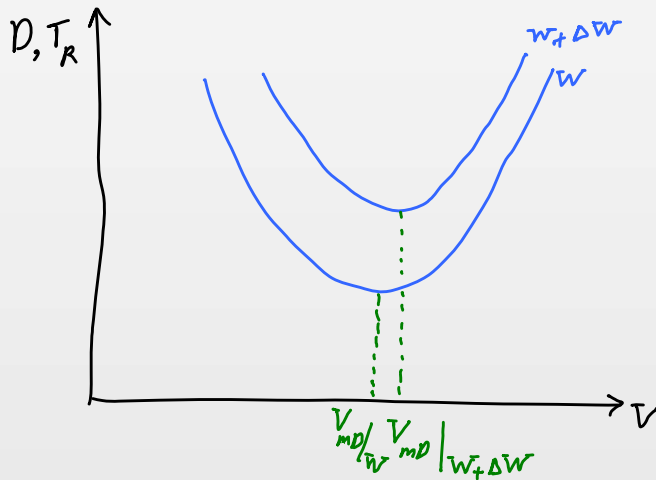


در شکل بالا، ارتفاع 12000m نشانگر سقف پرواز است بالاتر از این ارتفاع $T < D$ است، پرواز یگواخت امکان ندارد.



در منحنی بالا تغییرات حداکثر سرعت واقعی در ارتفاع خاصی صورت می‌گیرد که در واقع این ارتفاع نشان دهنده مسائل اقتصادی پرواز است. یکی از دلایل پرواز در ارتفاع بالا مقرون به صرفه بودن پرواز است. چرا که درگ کمتر مصرف سوخت کمتر و نتیجتاً سرعت بیشتری به دست می‌آید که باعث سرعت بیشتر و برد بیشتر و مداومت پروازی کمتر می‌شود.

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D_0} + \frac{2W^2}{\rho V^2 S \pi A R e}$$

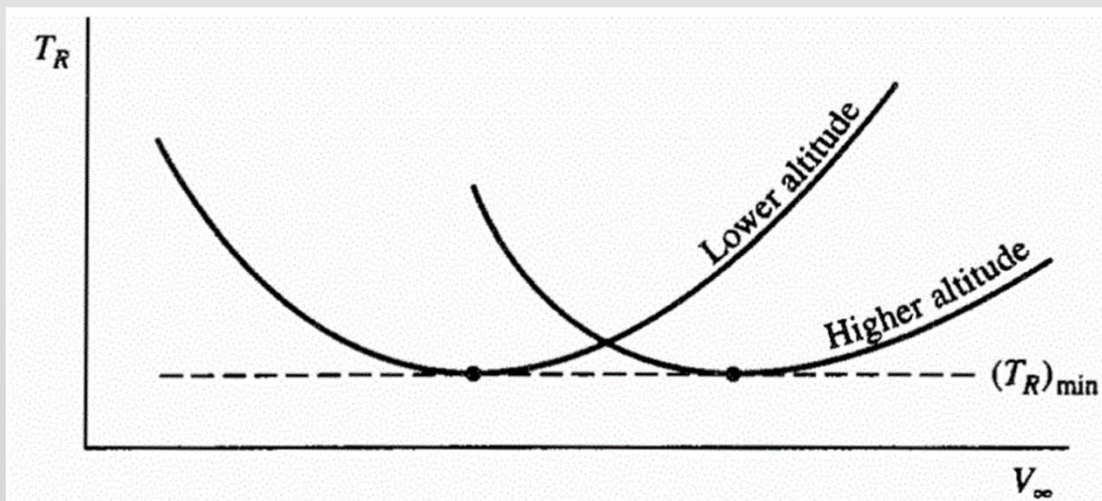


افزایش وزن باعث افزایش درگ می شود.

$$D = \frac{1}{2} C_{D_0} \rho V^2 S + \frac{2(W + \Delta W)^2}{\rho V^2 S \pi A R e}$$

* افزایش وزن :

$$D = \frac{1}{2} C_{D_0} \rho V^2 S + \frac{2W^2}{\rho V^2 S \pi A R e} + \frac{2(2W\Delta W + \Delta W^2)}{\rho V^2 S \pi A R e}$$



$$D = \frac{1}{2} C_{D_0} \rho V^2 S + \frac{2W^2}{\rho V^2 S \pi A R e}$$

* اثر افزایش ارتفاع یا دانسیته :

افزایش ارتفاع ← کاهش ρ ← باعث می شود که پیمای پارازیت کم شود و پیمای القایی افزایش پیدا کند.

V_{mp} با افزایش ارتفاع زیاد می شود و نمودار T_R بازشده و به سمت راست شیب پیدا می کند.

موتور پیستونی: در موتورهای پیستونی به جای تراست از توان استفاده می شود.

$$P_R = D \cdot V = T_R \cdot V$$

$$D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_{D_0} + \frac{2W^2}{\rho S V^2 \pi A R e}$$

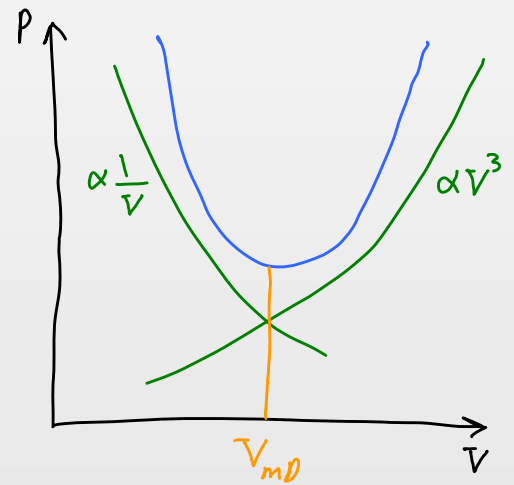
$$P = \frac{1}{2} \rho S V^3 C_{D_0} + \frac{2W^2}{\rho S V \pi A R e} \approx A V^3 + \frac{B}{V}$$

$$V = \frac{V_E}{\sqrt{\delta}}$$

$$P \sqrt{\delta} = \frac{1}{2} \rho S V_E^3 C_{D_0} + \frac{2W^2}{\rho S V_E \pi A R e}$$

$$P \sqrt{\delta} = A V_E^3 + \frac{B}{V_E}$$

Minimum Power



$$\left. \begin{aligned} D &= W \frac{D}{L} = W \frac{C_D}{C_L} \\ V &= \sqrt{\frac{W}{\frac{1}{2} \rho S C_L}} \end{aligned} \right\}$$

$$P = D \cdot V = W \frac{C_D}{C_L} \sqrt{\frac{W}{\frac{1}{2} \rho S C_L}} = \frac{C_D}{C_L^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{W^3}{\frac{1}{2} \rho S}}$$

شرط min قدرت این است که $\frac{C_D}{C_L^{\frac{3}{2}}}$ کمینه باشد.

$$\frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_D}{C_L^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_{D_0} + K C_L^2}{C_L^{\frac{3}{2}}} \right) = 0 \rightarrow$$

$$K C_{L_{mp}}^2 = 3 C_{D_0} \rightarrow C_{L_{mp}} = \sqrt{\frac{3 C_{D_0}}{K}}$$

mp: min power

$$C_{D_{mp}} = 4 C_{D_0}$$

$$C_{L_{mp}} = \sqrt{3} C_{L_{md}}$$

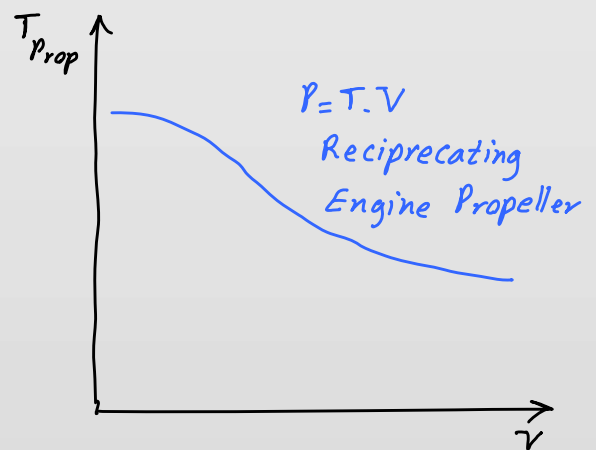
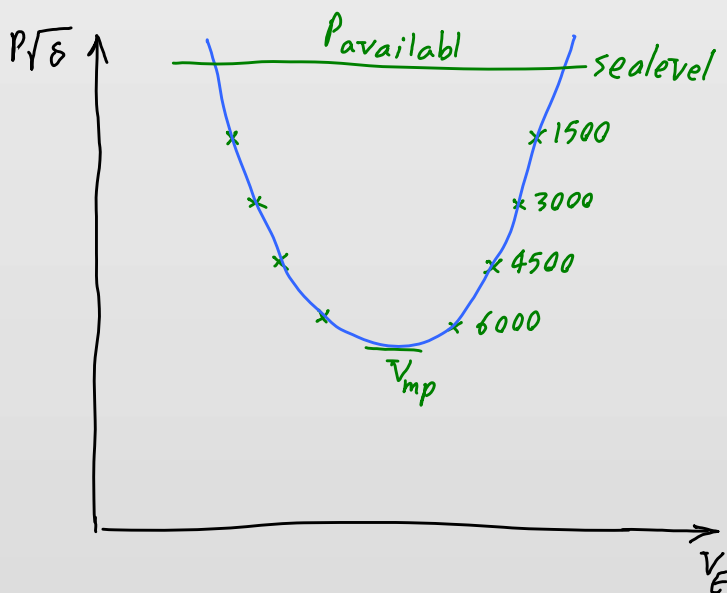
$$C_{D_{mp}} = \frac{4}{3} K C_{L_{mp}}^2$$

$$V_{mp} = \sqrt{\frac{W}{\frac{1}{2} \rho S C_{L_{mp}}}} = \sqrt{\frac{W}{\frac{1}{2} \rho S}} \times \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3} C_{L_{mp}}}} \Rightarrow V_{mp} = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} V_{md} \rightarrow m = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}$$

$$V_{md} = \sqrt{\frac{W}{\frac{1}{2} \rho S C_{L_{md}}}}$$

از طرفی

$$\frac{\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{mp}}{\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{max}} = \frac{2m^2}{1+m^4} = \frac{2\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}\right)^4} = 0.866$$



مثال: هواپیمایی دارای wing loading $2400 \frac{N}{m^2}$ می باشد. وزن بر سطح $\frac{W}{S}$ و رابطه درگ، پلار آن

برابر $C_D = 0.016 + 0.055 C_L^2$ است مقدار $\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{max}$ ، سرعت min Drag و همین طور $\frac{C_L}{C_D}$ را در $V_E = 100 \frac{m}{s}$ بدست آورید. ارتفاع پروازی SL است.

در شرایط min Drag: $C_{D_0} = k C_{L_{md}}^2 \rightarrow 0.016 = 0.055 C_{L_{md}}^2 \rightarrow C_{L_{md}} = 0.54$

$$V_{md} = \sqrt{\frac{W}{\frac{1}{2} \rho S C_{L_{md}}}} = \sqrt{\frac{2400}{\frac{1}{2} \times 1.255 \times 0.54}} = 84.2 \frac{m}{s}$$

$$\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{max} = \frac{C_{L_{md}}}{2 C_{D_0}} = \frac{0.54}{2 \times 0.016} = 16.875$$

$$m = \frac{V}{V_{md}} = \frac{100}{84.2} = 1.1876 \rightarrow \frac{\frac{C_L}{C_D}}{\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{max}} = \frac{2m^2}{1+m^4} = 0.944$$

$$\frac{C_L}{C_D} = 0.944 \times 16.875 = 15.93$$

نمال: در پرواز یک هواپیمای به وزن 25000 N و سطح بال 80 m^2 که دارای منحنی Drag Polar ،

$C_D = 0.016 + 0.04 C_L^2$ است مطلوب است min Thrust و سرعت مربوط در سطح دریا و ارتفاع 10000 m

($\delta = 0.58$) و همچنین min Power و سرعت مربوط به آن در شرایط ذکر شده.

$$C_{L_{MD}} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{k}} = \sqrt{\frac{0.016}{0.04}} = 0.632$$

$$\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{\max} = \frac{C_{L_{MD}}}{2C_{D_0}} = \frac{0.632}{2 \times 0.016} = 19.75$$

$$T_{\min} = D_{\min} = \frac{W}{\left(\frac{C_L}{C_D}\right)_{\max}} = \frac{250000}{19.75} = 12658\text{ N}$$

$$V_{MD_E} = \sqrt{\frac{W}{\frac{1}{2} \rho_0 S C_{L_{MD}}}} = \sqrt{\frac{250000}{\frac{1}{2} \times 1.255 \times 80 \times 0.632}} = 88.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_{MD_{(10000\text{m})}} = \frac{V_{MD_E}}{\sqrt{\delta}} = \frac{88.8}{\sqrt{0.58}} = 116.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$